Theorie

der

Landesvermessung

von

Johann Soldner
(1810)

Mit neun Textabbildungen

Herausgegeben

von

J. Frischauf

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1911

Theorie der Landesvermessung.

Von

Johann Soldner.

Erster Teil.

Berechnung eines geodätischen Dreiecksnetzes und Ermittlung der sphärischen Koordinaten der Dreieckspunkte.

Allgemeine Betrachtungen über die Berechnung eines Hauptnetzes.

1. Die jetzt bei großen trigonometrischen Operationen gewöhnliche Rechnungsmethode ist die *Delambre*sche. Nach dieser werden die beobachteten Winkel auf Chordenwinkel reduziert und dann die Chordendreiecke als ebene berechnet.

Bei Gradmessungen ist diese Methode sehr brauchbar, weil man dadurch die Distanzen, sozusagen, ohne alle Hypothese erhält; denn die wenigen Data, welche man zur Reduktion der sphärischen Winkel auf Chordenwinkel von der Figur und Größe der Erde hernehmen muß, stehen mit den Distanzen in solcher Verbindung, daß man sie sehr beträchtlich ändern kann, und sie folglich nicht genau zu wissen braucht, ohne daß dies auf die Distanzen einen merklichen Einfluß hat.

2. Bei einer speziellen und genauen Aufnahme eines beträchtlich großen Landes verhält sich aber die Sache anders. Hier ist es unumgänglich nötig, Abszissen und Ordinaten der einzelnen Punkte zu berechnen oder sich irgendeiner anderen bestimmten Einteilung der wirklichen (und also krummen) Erdoberfläche zu bedienen, um Ordnung in die Detailmessung zu bringen, die einzelnen Pläne genau zu verbinden und sie so

bezeichnen zu können, daß man beim ersten Anblicke gleich sieht, wo sie hingehören.

3. Eine nähere Betrachtung der *Delambre*schen Methode zeigt aber, daß man durch sie den genannten Zweck nicht erreichen kann. Denn die Chordenwinkel sind immer kleiner als die sphärischen, folglich wird der Gyrus einer jeden Station kleiner als 360°, und dieses hat zur notwendigen Folge, daß man Abszissen und Ordinaten eines jeden Punktes anders finden muß, wenn man in dem Dreiecksnetze einen anderen Weg nimmt, um zu diesem Punkte zu gelangen, indem in diesem Falle die Direktionswinkel immer anders werden. Dieses ist, im Vorbeigehen gesagt, auch die Ursache, warum *Delambre* die Abszissen und Ordinaten ganz aufgegeben hat und die Längen und Breiten unmittelbar aus den Distanzen berechnet.

Sphärische Berechnung terrestrischer Dreiecke.

4. Man sieht leicht, daß der in (2) angegebene Zweck nur dadurch erreicht werden kann, daß man die terrestrischen Dreiecke als sphärische behandelt. Denn dann bleiben die Gyri der Stationen 360°, die Abszissen und Ordinaten müssen die nämlichen bleiben, man mag, um sie zu berechnen, in dem Netze einen Weg nehmen, welchen man will, und zugleich bleibt ein jeder Punkt in seiner natürlichen Lage.

5. Da in dem sphärischen Dreiecke die Sinusse der Seiten sich verhalten, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel, so ist hier in der Tat die Berechnung der sphärischen Dreiecke nicht im geringsten mühsamer als die der geradlinigen, und einige Mathematiker haben daher schon den Vorschlag gemacht, sich bei großen terrestrischen Operationen der sphärischen Trigonometrie zu bedienen. Aber die Sache wurde bisher noch nie ausgeführt, weil man ein unübersteigliches Hindernis, wie man glaubte, in folgendem Umstande fand: wenn man die Sinusse der Seiten gefunden hat, so muß man die Bögen wieder in irgendeinem Längenmaße, z. B. bayrischen Ruten ausdrücken. Die gewöhnliche Methode, dies zu bewerkstelligen, ist folgende: man sucht mittels des gegebenen Sinus den dazu gehörigen Winkel, verwandelt diesen in Teile des Halbmessers und multipliziert ihn mit dem Halbmesser der in der Rechnung angenommenen Kugel, in dem verlangten Längenmaße ausgedrückt. Aber man sieht sogleich, daß diese Methode sehr mühsam ist und wenig Genauigkeit gewährt.

Denn wegen des ungleichen Fortschreitens der Sinusse kann man mittels unserer gewöhnlichen Tafeln die Winkel nicht genauer als $0'',1$, höchstens $0,05''$ finden. Eine Sekunde des terrestrischen Bogens macht aber 106 bayrische Fuß; man würde also schon dadurch Fehler von 5—10 Fuß in den Distanzen begehen.

6. Wir wollen daher sehen, einen Weg ausfindig zu machen, wie man aus dem Logarithmus des Sinus den Logarithmus des Bogens in bayrischen Ruten unmittelbar, und mit gänzlicher Umgehung der trigonometrischen Tafeln, finden kann.

Das Verhältnis eines Bogens zu seinem Sinus läßt sich durch eine Funktion des Sinus oder Bogens ausdrücken.

Es sei m die Zahl, mit welcher man den Sinus eines Bogens φ multiplizieren muß, um den Bogen zu erhalten. Man hat also

$$(1) \qquad m \cdot \sin\varphi = \varphi$$

Bekanntlich ist

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{1}{2\cdot 3}\sin^3\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\sin^5\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\sin^7\varphi + \ldots\ldots\ldots$$

Da in unserem Falle der Bogen φ immer die Seite eines terrestrischen Dreiecks vorstellt, also sehr klein ist, und äußerst selten die Größe von 1° erreicht, so wird die obige Reihe sehr konvergieren.

Man hat, aus (1),

$$(2) \qquad \log. m = \log. \varphi - \log. \sin\varphi$$

und anstatt φ dessen eben angegebenen Wert substituiert, erhält man:

$$\log. m = \log. \left(1 + \frac{1}{2\cdot 3}\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\sin^4\varphi + \ldots\ldots\right)$$

ferner

$$\begin{aligned}\log. m = &\left\{\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\sin^4\varphi + \ldots\right\}\cdot \log. e \\ &-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\sin^4\varphi + \ldots\right\}^2\cdot \log. e \\ &+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\sin^4\varphi + \ldots\right\}^3\cdot \log. e \\ &- \text{usw.},\end{aligned}$$

wo e die Basis der hyperbolischen Logarithmen oder log. $e = 0{,}43429448$ ist.

Ordnet man die obigen Reihen nach den Potenzen von $\sin\varphi$, so hat man, indem man die höheren als sechsten Potenzen vernachlässigt,

$$(3)\quad \log. m = \frac{1}{6}\left(\log. e\right)\sin^2\varphi + \frac{11}{180}\left(\log. e\right)\sin^4\varphi + \frac{191}{5670}\left(\log. e\right)\sin^6\varphi + \ldots\ldots\ldots$$

und nach (2)

$$\log. \varphi = \log. \sin\varphi + \log. m.$$

Will man aber den Bogen φ in bayrischen Ruten ausdrücken, so muß φ noch mit dem Halbmesser der in der Rechnung vorausgesetzten Kugel r in bayrischen Ruten multipliziert werden.

Es ist also:

$$(4)\qquad \log. \varphi = \log. \sin\varphi + \log. m + \log. r.$$

Den Wert von r findet man auf folgende Art:

Es sei $Q = 10000000$ mètres, der Quadrant des Erdmeridians, b die halbe Erdachse, $\varepsilon = \frac{1}{305}$ die Abplattung (S. connaissance des temps 1810 pag. 485), $m : n = 306 : 305$ das Achsenverhältnis und π der halbe Umfang des Kreises, dessen Halbmesser 1, so ist:

$$b = \frac{Q\,(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}{\pi n m^2 \sqrt{2}} \cdot \left(1 - \frac{15}{16}\varepsilon^2\right)$$

Hieraus findet man $b = 2177685{,}5$ bayrische Ruten, und dann hat man unter der Polhöhe λ

$$r = b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon\cos^2\lambda),$$

wenn ε^2 vernachlässigt wird.

Da in der Folge öfter Ausdrücke gebraucht werden, die sich auf das Sphäroid beziehen, so wird es gut sein, die wichtigten Sätze hier zu sammeln.

s Wenn in nachstehender Figur AP ein Quadrant des Erdsphäroids, C der Mittelpunkt und also $PC\,(= b)$ die halbe Erdachse, λ die Polhöhe des Punktes M (oder der Winkel MBA), der zu dem Punkte M gehörige Erdhalbmesser $MC = \varrho$, die Normale $MN = r$ und die sog. verbesserte Breite $MCA = \lambda$, so ist:

$$\varrho^2 = \frac{b}{n^2} \cdot \frac{m^4 - (m^4 - n^4)\sin^2\lambda}{m^2 - (m^2 - n^2)\sin^2\lambda},$$

und wenn man ε^2 vernachlässigt

$$\varrho = b\,(1 + \varepsilon\cos^2\lambda)$$

$$r = \frac{bm^2}{n\sqrt{\{n^2 + (m^2 - n^2)\cos^2\lambda\}}},$$

oder hinreichend genau:

$$r = b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon\cos^2\lambda);$$

der Krümmungshalbmesser ist:

$$R = \frac{b \cdot m^2 n}{\{m^2 - (m^2 - n^2)\sin^2\lambda\}^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$R = b\,(1 + 2\varepsilon - 3\varepsilon\cos^2\lambda);$$

der Bogen des Meridians vom Äquator bis zu der Polhöhe λ, wird:

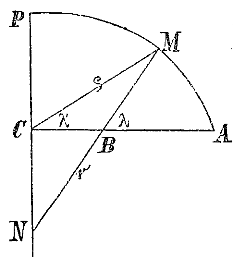

Fig. 1.

$$AM = \frac{b \cdot m^2 n\sqrt{8}}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\lambda - \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\sin 2\lambda + \frac{15}{16}\varepsilon^2\lambda + \frac{15}{64}\varepsilon^2\sin 4\lambda + \ldots\right\}.$$

Ein Grad der Breite g, dessen mittlere Polhöhle λ,

$$g = \frac{b \cdot m^2 n\sqrt{8}}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{\pi}{180} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cdot \sin 1^\circ \cos 2\lambda + \frac{15}{16}\varepsilon^2\frac{\pi}{180} + \frac{15}{32}\varepsilon^2\sin 2^\circ\cos 4\lambda + \ldots\ldots\right\}$$

Ein Grad der Länge

$$l = \frac{\pi}{180} \cdot b\frac{m^2}{n^2} \cdot \cos\lambda\left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 - n^2}{n^2} \cdot \cos^2\lambda + \frac{3}{8}\left(\frac{m^2 - n^2}{n^2}\right)^2 \cdot \cos^4\lambda - \ldots\ldots\right\}.$$

Um den Unterschied von λ und λ' zu finden, hat man:

$$\text{tang}\,(\lambda - \lambda') = \frac{(m^2 - n^2)\sin 2\lambda}{m^2 + n^2 + (m^2 - n^2)\cos 2\lambda}$$

oder hinreichend genau in Sekunden

$$\lambda - \lambda' = \frac{\varepsilon}{\sin 1''} \cdot \sin 2\lambda.$$

Die Beweise dieser Sätze gründen sich alle auf die bekannten Eigenschaften der Ellipse. Wo für dieselbe Größe zwei Ausdrücke gegeben worden sind, ist der erste immer ganz genau, und der zweite nur insofern, als man die zweite Potenz der Abplattung vernachlässigen kann.

7. Um eine Reihe Dreiecke sphärisch zu berechnen, muß man vor allen Dingen den log. sin des Bogens suchen, welchen die gemessene Basis darstellt. Man bedient sich dazu ebenfalls der Tabelle, nur muß hier ein indirektes Verfahren beobachtet werden, weil die Tabelle den log. sin zum Argumente hat, welchen man erst suchen will. Man geht dabei auf folgende Art zu Werke: man setzt anfangs $n = r$ und sucht den Sinus durch den Ausdruck

$$\log. \sin = \log. \text{Arcus} - \log. r.$$

Hierdurch findet man den log. sin hinreichend genau, um zur Bestimmung von log. n als Argument zu dienen; und dann hat man:

$$\log. \sin = \log. \text{Arcus} - \log. n.$$

8. Hat man den Sinus der Basis gefunden, so berechnet man den sphärischen Exzeß der drei Winkel in jedem Dreiecke über 180°; weil die Summe der drei Winkel des Dreiecks, so wie man sie in der Rechnung anwendet, gleich sein muß 180° plus dem sphärischen Exzesse.

Wenn nun der sphärische Exzeß eines Dreiecks, in Sekunden ausgedrückt, e heißt, der Flächeninhalt des Dreiecks Q, und der Halbmesser r, so ist bekanntlich

$$\acute{e} = \frac{Q}{r^2 \cdot \sin 1''}.$$

Den Flächeninhalt Q braucht man zu dem Zwecke nur ungefähr zu wissen, und aus dem Grunde kann man anstatt der Fläche des sphärischen Dreiecks die des geradlinigen nehmen. Wenn in einem geradlinigen Dreiecke zwei Seiten A und B

heißen, und der von ihnen eingeschlossene Winkel φ, so ist die Fläche des Dreiecks $\frac{1}{2} AB \sin \varphi$. Man hat also auch

$$e = \frac{AB \cdot \sin \varphi}{r^2 \cdot \sin 2''},$$

(wenn alles in bayrischen Ruten ausgedrückt wird, ist

$$\log. \frac{1}{r^2 \cdot \sin 2''} = 0{,}33300 - 8).$$

Gewöhnlich legt man eine Reihe Dreiecke zuerst roh an, wie die Winkel beobachtet sind. Ist dies geschehen, so kann man den sphärischen Exzeß noch einfacher so finden: Es seien $\sin \alpha$ und $\sin \alpha'$ die Sinusse zweier Seiten des Dreiecks und φ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so ist

$$e = \sin \alpha \cdot \sin \alpha' \cdot \sin \cdot \varphi \operatorname{cosec} 2'',$$

wo $\log. \operatorname{cosec} 2'' = 5{,}01340$.

Untersuchung über den Einfluß, welchen die Abplattung der Erde auf die sphärische Berechnung großer Dreiecke haben könnte.

9. Das Bisherige enthält im allgemeinen das Verfahren bei der sphärischen Berechnung eines Dreiecksnetzes, die an sich sehr einfach ist. Da aber die Erde keine Kugel, sondern ein Sphäroid ist, so muß untersucht werden, welchen Einfluß die Sphäroidizität auf diese Berechnung der Dreiecke hat. Bei näherer Betrachtung der Sache wird man leicht finden, daß der Einfluß der Abplattung sich in folgendem äußern muß: 1) Bei der Berechnung des sphärischen Exzesses muß r nicht konstant, sondern nach den Polhöhen verschieden angenommen werden. 2) Wir haben vorausgesetzt, daß die terrestrischen Dreiecke sämtlich zu einem Halbmesser gehören, wofür wir die Normale angenommen haben, welche der Polhöhe von München entspricht; sie gehören aber, wegen der Abplattung, zu verschiedenen Halbmessern, die durch ihre mittlere Polhöhe bestimmt werden. Wir wollen nun den Einfluß dieser zwei Fehler untersuchen.

10. Der Halbmesser unserer Kugel ist nach dem Obigen:

$$r = b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cdot \cos^2 \lambda).$$

Es ist also eigentlich:

$$e = \frac{AB \cdot \sin \varphi}{b^2 (1 + 4\varepsilon) \sin 2''} \cdot \{1 + 2\varepsilon \cdot \cos^2 \lambda\},$$

wenn die zweite Potenz von ε vernachlässigt wird.

Durch diesen Ausdruck findet man, daß bei einem Dreiecke, welches $10''$ sphärischen Exzeß hat, derjenige Teil, welcher von ε abhängt, unter der Polhöhe 50° noch nicht $0{,}006''$ von demjenigen verschieden ist, den das Dreieck unter der Polhöhe 45° hat. Da nun diese Größe durchaus unter aller möglichen Genauigkeit beim Beobachten der Winkel ist, so geht daraus hervor, daß die Abplattung der Erde auf die Berechnung des sphärischen Exzesses keinen Einfluß hat.

Um den Fehler zu bestimmen, welchen die Voraussetzung eines gleichen Halbmessers für alle Dreiecke verursacht, denke man sich zwei aneinanderliegende Dreiecke, deren mittlere Polhöhe ψ und ψ' sind, und nehme an, man wolle in dem Dreiecke ψ' die Seite c aus der Seite a, welche beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist, berechnen. a bedeutet den Bogen im Längenmaß ausgedrückt, und da der Halbmesser des Dreiecks ψ, nach dem Obigen $= b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cos^2 \psi)$ so wird der Bogen in Teilen des Halbmessers, mit dessen Sinus man rechnet, sein:

$$\frac{a}{b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cdot \cos^2 \psi)}$$

oder, da wir immer ε^2 vernachlässigen:

$$\frac{a}{b}\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \cos^2 \psi).$$

Heißen nun die a und c gegenüberstehenden Winkel α und γ, so wird man, unter der Voraussetzung eines konstanten Halbmessers, nämlich $b\,(1 + 2\,\varepsilon - \varepsilon \cdot \cos^2 \psi)$, der auch für das Dreieck ψ' gelten soll, haben:

$$\sin \frac{c}{b}\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \cos^2 \psi) = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \sin \frac{a}{b}(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \cos^2 \psi),$$

wo c auch den Bogen in Längenmaß bedeutet.

Aber das Dreieck ψ' hat eigentlich den Halbmesser b $(1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cdot \cos^2 \psi')$, man muß daher, um genau zu verfahren, a mit

$$\frac{1}{b}\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \cos^2 \psi') \text{ anstatt mit } \frac{1}{b}\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \cos^2 \psi)$$

multiplizieren, um es als Basis in dem Dreiecke ψ' gebrauchen zu können. Auf diese Art wird man erhalten:

$$\sin\frac{c}{b}\,1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cdot\cos^2\psi') = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{a}{b}\left(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cdot\cos^2\psi'\right).$$

Bezeichnet man, der Unterscheidung wegen, den eben gefundenen genaueren Wert von c mit c', so kommt es darauf an, $c - c'$ zu bestimmen, welches der gesuchte Fehler sein wird.

Indem man die zweiten und höheren Potenzen von ε vernachlässigt, erhält man, nach bekannten trigonometrischen Sätzen, aus den zwei vorhergehenden Gleichungen:

$$\sin\frac{c}{b} - \varepsilon\,(2 - \cos^2\psi)\,\frac{c}{b}\cdot\cos\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{a}{b} - \varepsilon\,(2 - \cos^2\varphi)\,\frac{a}{b}\cdot\cos\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\sin\frac{c'}{b} - \varepsilon\,(2 - \cos^2\psi')\,\frac{c'}{b}\cdot\cos\frac{c'}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{a}{b} - \varepsilon\,(2 - \cos^2\psi')\,\frac{a}{b}\;\cos\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

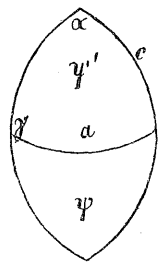

Fig. 2.

c' kann nur äußerst wenig von c verschieden sein; man kann daher ohne merklichen Fehler in dem Gliede der zweiten Formel, welches von der Ordnung ε ist, c für c' setzen. Tut man das und zieht die zweite Formel von der ersten ab, so hat man:

$$\sin\frac{c}{b} - \sin\frac{c'}{b} = \varepsilon\,(\cos^2\psi - \cos^2\psi')\left(\frac{a}{b}\cdot\cos\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} - \frac{c}{b}\cdot\cos\frac{c}{b}\right).$$

Da dieser Ausdruck für $\sin\frac{c}{b} - \sin\frac{c'}{b}$ ganz von der Ordnung ε ist, so kann man für $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ setzen $\frac{\sin\frac{c}{b}}{\sin\frac{a}{b}}$, ohne einen Fehler zu begehen, der größer als von der Ordnung ε^2 wäre, wie man aus den vorhergehenden Formeln ersieht. Da ferner $\frac{c}{b}$

und $\frac{a}{b}$ sehr kleine Bögen sind, und noch mit ε multipliziert werden, so kann man anstatt dieser Bögen ihre Sinusse setzen. Dieses vorausgesetzt, wird man haben:

$$\sin\frac{c}{b} - \sin\frac{c'}{b} = \varepsilon\,(\cos^2\psi - \cos^2\psi')\left(\cos\frac{a}{b} - \cos\frac{c}{b}\right)\sin\frac{c}{b}.$$

Da nun aber bekanntlich allgemein:

$$\cos^2\varphi - \cos^2\varphi' = \sin(\varphi' + \varphi)\sin(\varphi' - \varphi)$$

und

$$\cos\varphi - \cos\varphi' = 2\sin{}^1/_2(\varphi' + \varphi)\sin{}^1/_2(\varphi' - \varphi),$$

so läßt sich unsere Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\sin\frac{c}{b} - \sin\frac{c'}{b}$$

$$= 2\varepsilon\cdot\sin(\psi' + \psi)\sin(\psi' - \psi)\sin\frac{c-a}{2b}\cdot\sin\frac{c+a}{2b}\cdot\sin\frac{c}{b}.$$

Man sieht hieraus, daß der in Rede stehende Fehler Null wird, wenn die beiden Dreiecke unter einerlei Polhöhe liegen, weil dann $\sin(\psi' - \psi) = 0$, und daß er ferner Null wird, wenn die zu suchende Seite c der gegebenen a gleich ist. Um den Einfluß des Fehlers, der Voraussetzung gleicher Halbmesser für alle Dreiecke, an einem Beispiele zu zeigen, sei $\frac{a}{b} = 2^0$, oder $a = 60$ Stunden, $\frac{c}{b} = 1^0$, oder $c = 30$ Stunden, ψ sei 48^0 und $\psi' = 49^0$, so, daß also die mittleren Polhöhen um 1^0 verschieden sind. Mit diesen Datis und $\varepsilon = \frac{1}{305}$ wird man erhalten:

$$\sin\frac{c}{b} - \sin\frac{c'}{b} = -0{,}000000000453.$$

Da die Sinusse nur mit sieben Dezimalstellen gebraucht werden, so sieht man, daß dieser Fehler gar keinen Einfluß auf die Seite c hat. Will man den Fehler lieber in bayrischen Ruten ausgedrückt haben, so kann dies auf folgende einfache Art geschehen. Da die Bögen $\frac{c}{b}$ und $\frac{c'}{b}$ sehr klein sind, o kann man anstatt der Sinusse die Bögen setzen. Dies gibt:

$$c - c' = -0{,}000000000453 \cdot b$$

oder $$c - c' = -0{,}000991.$$

Das heißt also: bei einer Distanz von 30 Stunden ist unter den hier angegebenen Umständen der Fehler, welcher aus der Voraussetzung gleicher Halbmesser in der Distanz entsteht, noch nicht eine Linie. Es ist zwar nicht zu leugnen, daß gegenwärtiger Fehler, der bei zwei aneinander liegenden Dreiecken entsteht, sich anhäuft, wenn die Dreiecksverbindung weiter fortgesetzt wird. Aber ein jeder, der sich mit großen trigonometrischen Operationen beschäftigt hat, wird unbedingt einräumen, daß es nicht möglich ist, die Winkel mit solcher Genauigkeit zu messen, daß man bei Übertragung der Distanzen von einem Dreiecke auf ein anderes Fehler vermeiden könnte, welche nicht an hundertmal größer wären als der angegebene, und gegen welche dieser also gänzlich verschwindet. Denn wenn das Dreieck ψ' so beschaffen ist, daß bei dem gegebenen Verhältnisse der Seiten $c : a = 1 : 2$ ein Fehler in dem Winkel γ im Minimo auf die gegenüberstehende Seite c Einfluß hat, so darf man doch in dem Winkel γ noch nicht $0{,}003''$ fehlen, um den hier angegebenen Fehler in die Distanz c zu bringen. Man wird auch bemerken, daß im gegenwärtigen Beispiele die Dreiecke von so außerordentlicher Größe und so unvorteilhafter Situation angenommen worden sind, wie sie wohl nie in der Praxis vorkommen können. Nimmt man ein Beispiel aus gewöhnlich vorkommenden Dreiecken, so verschwindet der Fehler fast ganz und gar, wie man sich leicht überzeugen kann.

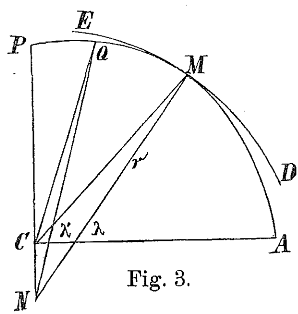

Fig. 3.

Wir haben nun gesehen, daß die Verschiedenheit der Halbmesser wegen der Abplattung keinen merklichen Einfluß auf das Verhältnis der Seiten zu ihren gegenüberstehenden Winkeln hat. Aber wenn das ganze Netz in einer Kugel berechnet wird, welche das Sphäroid in München berührt, so werden nördlich und südlich von München die Distanzen etwas vergrößert, weil die Berührungskugel über das Sphäroid hinausgeht. Wir wollen diesen Fehler bestimmen:

Wenn in vorherstehender Figur AP der elliptische Meridian von München, M München und N der Punkt ist, wo die Normale von München die Erdachse durchschneidet, und man zieht aus N mit dem Halbmesser NM den Kreisbogen ED, so wird dieser in der Kugel liegen, in welcher das Netz berechnet wird; und eine Distanz über Q hinaus, wird in dem Verhältnisse von NQ zu NM vermindert oder mit $\frac{NQ}{NM}$ multipliziert werden müssen, um sie auf das Sphäroid zu reduzieren.

Wenn die Polhöhe von München λ und die verbesserte Breite λ', so ist, in dem Dreiecke MNC, der Winkel

$$NMC = \lambda - \lambda'$$

und

$$CM : CN = \sin(\lambda - \lambda') : \cos\lambda;$$

für $\sin(\lambda - \lambda')$ kann man setzen $\lambda - \lambda'$, und nach Nr. 6 hat man:

$$\lambda - \lambda' = \varepsilon \cdot \sin 2\lambda$$

und

$$CM = b(1 + \varepsilon \cdot \cos^2\lambda),$$

dies gibt

$$CN = 2\varepsilon \cdot b \cdot \sin\lambda.$$

Nun hat man in dem Dreiecke CQN, wenn die Polhöhe von $Q = \psi$ ist, mit genügender Annäherung:

$$CQ = b(1 + \varepsilon \cdot \cos^2\psi)$$

$$CN = 2\varepsilon \cdot b \sin\lambda$$

$$CNQ = 90^\circ - \varphi$$

und

$$NQ = 2\varepsilon \cdot \sin\lambda \cdot \sin\psi + \sqrt{\left\{b^2(1 + \varepsilon \cdot \cos^2\psi)^2 - 4\varepsilon^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2\lambda \cdot \cos^2\psi\right\}},$$

und, wenn man die Größen von der Ordnung ε^2 vernachlässigt,

$$NQ = b\{1 + \varepsilon \cdot \cos^2\psi + 2\varepsilon \cdot \sin\lambda \cdot \sin\psi\}.$$

Wenn man also für NM dessen Wert aus Nr. 6 substituiert, so erhält man

$$\frac{NQ}{NM} = \frac{1 + \varepsilon \cdot \cos^2\psi + 2\varepsilon \cdot \sin\lambda \sin\psi}{1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cdot \cos^2\lambda}$$

$$= 1 - 4\varepsilon \cdot \cos^2\frac{1}{2}(\psi + \lambda) \cdot \sin^2\frac{1}{2}\psi - \lambda);$$

λ ist die Polhöhe von München, also $48^\circ\ 8'$, setzen wir $\psi = 50^\circ$, welches in die nördlichste Gegend von Bayern fällt, so findet man

$$4\varepsilon \cdot \cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \lambda) \sin^2 \frac{1}{2}(\psi - \lambda) = 0{,}00000149,$$

und dieses würde also nur 6 in der siebenten oder letzten Dezimalstelle der Logarithmen der Distanzen betragen.

Wollte man indessen hierauf Rücksicht nehmen, um die Distanzen ganz auf dem Sphäroide zu haben, so könnte man sich der folgenden Tafel bedienen.

Polhöhe	46°	46,5	47	47,5	48	48,5	49	49,5	50°
Reduktion	9	5	3	1	0	0	1	4	6

des Logarithmus in Einheiten der siebenten Dezimalstelle.

Von dem Logarithmus einer jeden Distanz wird der Logarithmus abgezogen, welchen diese Tafel für die Polhöhe gibt, unter der die Distanz liegt.

Man sieht jedoch, daß diese Korrektion in der Ausübung ganz unbeträchtlich ist, und wird sonach den Schluß ziehen können, daß in praktischer Hinsicht die sphärische Berechnung terrestrischer Dreiecke hinreichende Genauigkeit gewährt.

Berechnung der sphärischen Abszissen und Ordinaten.

11. Bei Bestimmung der Abszissen und Ordinaten geht man von irgendeinem Hauptpunkte des Netzes aus, auf welchen man Abszissen oder Ordinaten beziehen will. Bei der Triangulation von Bayern ist dieser Punkt der nördliche Turm der Frauenkirche in München. Fällt man von irgendeinem anderen Punkte einen Perpendikel als größten Kreis der Kugel auf den Meridian des ersten, so wird dieser Perpendikel die Ordinate des Punktes genannt, und derjenige Teil des Meridians, der zwischen dem Fußpunkte dieses Perpendikels und dem Orte, von dem man ausgeht, liegt, ist die Abszisse des Punktes.

Aus dieser Definition sphärischer Abszissen und Ordinaten ersieht man, daß die Abszissen alle auf dem Meridian des Ortes liegen, von welchem man ausgeht; die Ordinaten, welche alle von diesem Meridiane unter rechten Winkeln ausgehen, sind größte Kreise, welche in einem Abstande von 90° von dem Meridiane alle in einem Punkte zusammen laufen. Aus dieser Eigenschaft der Abszissen und Ordinaten geht die Art hervor, wie sie zu berechnen sind.

Es sei, in untenstehender Figur 4, RS der Meridian des Ortes, auf welchen man Abzissen und Ordinaten beziehen will; MNP sei ein terrestrisch sphärisches Dreieck, und A'' sei der Punkt, welcher 90° gegen Westen von dem Meridian RS absteht. Zieht man nun die größten Kreise $A''NQ$ und $A''ML$, so wird das Dreieck $A''QL$ in Q und L rechtwinklig sein; ML wird die Ordinate des Punktes M und NQ die des Punktes N sein.

Der Bogen LQ, gleich dem Winkel A'' am Westpunkte, ist der Unterschied der Abszissen der Punkte M und N. Die Winkel, welche die Seiten des Dreiecks mit den Ordinatenkreisen machen, werden Direktionswinkel genannt; man zählt sie vom Westpunkte an über Nord, Ost usw. bis 360°. Nennt man den Direktionswinkel $A''MN$ α und den Direktionswinkel $A''NM$ α', so werden α und α' um 180° und noch eine sehr kleine Größe, welche von der Konvergenz der Ordinatenkreise abhängt, verschieden sein.

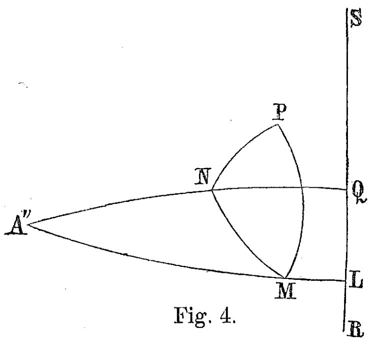

Fig. 4.

Sind nun Abszisse A und Ordinate O des Punktes M gegeben, und man will Abszisse und Ordinate des Punktes N bestimmen, die A' und O' heißen sollen, so ist in dem Dreieck $A''NM$ gegeben: $A''M = 90^\circ - O$ (wobei man sich einstweilen O, A, O' usw. als in Graden ausgedrückt vorstellt), die Dreiecksseite $MN = d$ und der Direktionswinkel $A''MN = \alpha$. Ferner ist $A''N = 90^\circ - O'$, $MNA'' = 360^\circ - \alpha'$ und $A'' = LQ$ der Unterschied der Abszissen von M und N.

Dieses vorausgesetzt, hat man:

1 $$\sin O' = \cos d \cdot \sin O + \sin d \cdot \cos O \cdot \cos \alpha$$

2 $$\operatorname{tang} A'' = \frac{\sin \alpha}{\cos O \cdot \cot d - \sin O \cdot \cos \alpha}$$

3 $$\cot \alpha' = \cos d \cdot \cot \alpha - \frac{\sin d \cdot \operatorname{tang} O}{\sin \alpha}.$$

Die letzte Formel dient dazu, den Direktionswinkel der Seite NM in N zu finden.

Diese Formeln sind zwar ganz genau, jedoch praktisch nicht wohl verwendbar; denn man müßte hiernach Abszissen und Ordinaten in Graden berechnen, und dieses geht aus Gründen, welche in Nr. 5 angeführt wurden, nicht an. Da die Bögen O, O', d, A'' und der Unterschied von α' und $\alpha + 180^\circ$ klein sind, so wird man sehr konvergierende Reihen erhalten, wenn man die trigonometrischen Funktionen dieser Bögen durch die Bögen selbst ausdrückt.

Erinnert man sich, daß, wenn φ irgendeinen Winkel bedeutet,

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{2\cdot 3}\varphi^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\varphi^5 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\varphi^7 + \ldots\ldots;$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\varphi^4 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\varphi^6 + \ldots$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{3\cdot 5}\varphi^5 + \ldots\ldots$$

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{45}\varphi^3 + \ldots\ldots$$

und umgekehrt

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{1}{2\cdot 3}\sin^3\varphi + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\sin^5\varphi + \ldots\ldots$$

$$\varphi = \operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\varphi + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5\varphi + \ldots\ldots$$

usw.

ist, so wird man aus den Formeln 1, 2, 3, indem man bis zu den dritten Potenzen von O, O', d und A'' geht, folgende finden:

$$(1)\quad O' = O + d\cdot\cos\alpha - \frac{O\cdot d^2}{2r^2}\cdot\sin^2\alpha - \frac{d^3}{6r^2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$$

$$(2)\quad A'' = d\cdot\sin\alpha + \frac{O^2\cdot d}{2r^2}\cdot\sin\alpha + \frac{d^3}{3r^2}\sin\alpha\cos\alpha^2 + \frac{O\cdot d^2}{2r^2}\cdot\sin 2\alpha$$

$$(3) \quad \alpha' = 180^0 + \alpha + \frac{d^2}{4r^2 \cdot \sin 1''} \cdot \sin 2\alpha + \frac{O \cdot d}{r^2 \cdot \sin 1''} \cdot \sin \alpha,$$

wo r wie bisher den Halbmesser bedeutet, und der Überschuß von α' über $180^0 + \alpha$ in Sekunden ausgedrückt ist.

Die Entwicklung dieser Ausdrücke ist etwas weitläufig, und da sich die Gründe dazu in dem Obigen finden, so kann sie hier wegbleiben. Bloß um ein Beispiel zu geben, soll der erste hier entwickelt werden.

Setzt man in 1. anstatt $\cos d$, $\sin O$, $\sin d$, $\cos O$ die oben angegebenen Reihen, indem man die Größen von der höheren als dritten Ordnung vernachlässigt, so hat man:

$$\sin O' = \left(1 - \frac{1}{2} d^2\right)\left(O - \frac{O^3}{2 \cdot 3}\right) + \left(d - \frac{d^2}{2 \cdot 3}\right)\left(1 - \frac{1}{2} O^2\right) \cos \alpha$$

oder:

$$\sin O' = O + d \cdot \cos\alpha - \frac{O^3}{2 \cdot 3} - \frac{O \cdot d^2}{2} - \frac{O^2 \cdot d}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{d^3}{2 \cdot 3} \cdot \cos \alpha,$$

da aber

$$O' = \sin O' + \frac{1}{2 \cdot 3} \sin^3 O', \text{ so hat man:}$$

$$O' = O + d \cdot \cos\alpha - \frac{O^3}{2 \cdot 3} - \frac{O \cdot d^2}{2} - \frac{O^2 \cdot d}{2} \cos\alpha - \frac{d^3}{2 \cdot 3} \cdot \cos \alpha + \frac{(O + d \cdot \cos \alpha)^3}{2 \cdot 3}$$

oder:

$$(1) \quad O' = O + d \cdot \cos \alpha - \frac{O \cdot d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha - \frac{d^3}{2 \cdot 3} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

Die bisherige Rechnung setzt den Halbmesser 1 voraus, da aber hier der Halbmesser r ist, so müssen O', O und d mit r dividiert werden. Indessen, da wir Abszissen und Ordinaten in bayrischen Ruten berechnen wollen, so muß auch wieder der Ausdruck von O' mit r multipliziert werden, wodurch man den Ausdruck (1) erhält. Die Formeln (1), (2) und (3) sind unmittelbar aus den Datis gefunden; macht man aber A'' von O' abhängig, so hat man auch, in dem Dreiecke $A''NM$

$$\sin A'' = \frac{\sin d}{\cos O'} \cdot \sin\alpha,$$

und hieraus erhält man:

$$A'' = d \cdot \sin\alpha + \frac{O'^2 \cdot d}{2r^2} \cdot \sin\alpha - \frac{d^3}{6r^2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha,$$

welcher Ausdruck einfacher ist, als (2).

Da wir oben die Abszisse des gegebenen Ortes M, A und und die des Ortes N, A' genannt haben, und A'' die Differenz von A' und A ist, so ist auch:

$$[2] \quad A' = A + d \cdot \sin\alpha + \frac{O'^2 \cdot d}{2r^2} \cdot \sin\alpha - \frac{d^3}{6r^2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha;$$

wenn man setzt:

$$d \cdot \sin\alpha = m, \quad d \cdot \cos\alpha = n,$$

so werden die Formeln (1), [2] und (3) auf die Form gebracht:

$$(1) \qquad O' = O + n - \frac{m^2 \cdot O}{2r^2} - \frac{m^2 \cdot n}{6r^2}$$

$$[2] \qquad A' = A + m + \frac{m \cdot O'^2}{2r^2} - \frac{n^2 \cdot m}{6r^2} \cdot$$

$$(3) \qquad \alpha' = 180^\circ + \alpha + \frac{m \cdot n}{2r^2 \cdot \sin 1''} + \frac{m \cdot O}{r^2 \cdot \sin 1''}$$

Zur Bequemlichkeit beim Rechnen folgen noch die hier auftretenden konstanten Logarithmen:

$$\log \frac{1}{2r^2} = 0{,}01856 - 13$$

$$\log \frac{1}{6r^2} = 0{,}54144 - 14$$

$$\log \frac{1}{2r^2 \cdot \sin 1''} = 0{,}33300 - 8$$

$$\log \frac{1}{r^2 \cdot \sin 1''} = 0{,}63402 - 8.$$

Da die Formeln (1), [2] und (3) Näherungsformeln sind, so muß noch gezeigt werden, daß sie in allen Fällen hinreichende Genauigkeit haben. Wir wollen zu dem Ende annehmen es sei $d = 1^\circ 30'$, oder 45 Stunden, $O = 30'$, oder 15 Stunden, und $\alpha = 46^\circ$; man findet dann mittels der genauen Formel 1, $O' = 5550{,}615''$.

Die Formel (1) gibt:

$$\begin{aligned} O &= +\ 1800'' \\ +n &= +\ 3751{,}156 \\ -\frac{m^2 \cdot O}{2r^2} &= -\quad 0{,}319 \\ -\frac{m^2 \cdot n}{6r^2} &= -\quad 0{,}221 \\ \hline O' &= \quad 5550{,}616 \end{aligned}$$

Die Formel 2 gibt:

$$\begin{aligned} A'' &= 3883{,}628'' \text{ und} \\ [2]\ +m &= \quad 3884{,}435'' \\ +\frac{m \cdot O'^2}{2r^2} &= +\quad 1{,}406 \\ -\frac{n^2 \cdot m}{6r^2} &= -\quad 0{,}214 \\ \hline A'' &= \quad 3885{,}627 \end{aligned}$$

Die Formel 3 gibt: $\alpha' = 46^\circ\, 1'\, 9{,}220''$ und

$$\begin{aligned} (3) \qquad \alpha &= \quad 46^\circ\ 0'\ 0'' \\ = \frac{m \cdot n}{2r^2 \cdot \sin 1''} &= +\quad 35{,}322 \\ + \frac{m \cdot O}{r^2 \cdot \sin 1''} &= +\quad 33{,}898 \\ \hline \alpha' &= \quad 46\quad 1\ \ 9{,}220 \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, daß die Näherungsformeln hinreichend genau sind.

Einrichtung der Detailpläne, damit sie, in Übereinstimmung mit den sphärischen Abszissen und Ordinaten, Teile der Kugelfläche bilden.

12. Bei der königl. Steuervermessungskommission ist in Ansehung der Detailmessung folgende Einteilung angenommen worden: Der Meridian des nördlichen Frauenturmes in München wird nördlich und südlich von München in gleiche Teile, jeder von 800 Ruten, geteilt; die von diesem Punkte des Meridians ausgehenden Ordinatenkreise werden ebenso von 800 zu 800 Ruten in gleiche Teile geteilt. Hierdurch entstehen kleine Vierecke, wovon ein jedes eine Tischplatte der Geodäten einnimmt.

Man sieht, daß diese Einteilung mit den sphärischen Abszissen und Ordinaten in der genauesten Verbindung steht. Ein solcher Streifen, der mit der Breite von 800 Ruten, westlich oder östlich, vom Münchner Meridiane ausgeht, heißt eine Schicht. Eine Schicht ist also eigentlich ein Kugelsegment, ihre Breite nimmt immer ab, bis sie in einem Abstande von 90° vom Münchner Meridiane Null wird.

Wenn man sich eine solche Abteilung über einen ganzen Quadranten der Erdoberfläche vorstellt, so wird sie nachstehende Figur 5 haben, wo *M* München und *RM* der Münchner Meridian ist*). Es ist einleuchtend, daß diejenigen Tischblätter, welche weit vom Münchner Meridiane entfernt sind, eigentlich Trapeze sind; aber von 800 zu 800 Ruten ist die Konvergenz der Ordinatenkreise viel zu gering, als daß sie, nach dem angenommenen Maßstabe 1 : 5000 oder 1 : 2500, merklich sein könnte; man kann daher diese Tischblätter als Rechtecke ansehen, die in der Richtung von Westen nach Osten 800 Ruten zur Breite haben, und deren Höhe, von Norden nach Süden, in der Nähe des Münchner Meridians ebenfalls 800 Ruten beträgt, sich aber in dem Maße vermindert, als die Blätter weiter vom Münchner Meridiane entfernt sind.

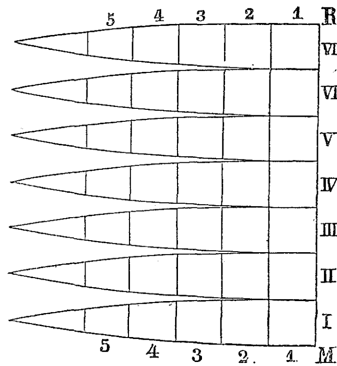

Fig. 5.

Wir wollen diese Verringerung der Höhe untersuchen.

13. Da die westlichen und östlichen Seiten der Tischblätter mit dem Münchner Meridiane parallel laufen, so ist es klar, daß sie Teile von Parallelkreisen zu diesem Meridiane sind. Wenn man sich durch die von 800 zu 800 Ruten eingeteilten Punkte des Münchner Meridians und die Achse des West- und Ostpunktes der Ordinatenkreise Ebenen vorstellt, so sieht man,

*) Diese Figur veranschaulicht zugleich die für die Bezeichnung der einzelnen Meßtischblätter geltende Vorschrift, welche darin besteht, daß man die »Schichten« mit römischen, die dem Meridiane parallel laufenden »Reihen« aber mit arabischen Ziffern bezeichnet und den treffenden nach der Weltgegend (NW = Nordwest, NO = Nordost usw.) benannten Quadranten versetzt; z. B. NW. V,3).

daß die Höhen der Tischblätter, in jeder Entfernung vom Münchner Meridiane, an der Achse gleiche Winkel machen; diese Höhen werden sich also verhalten, wie die Halbmesser der Parallelkreise, auf welchen sie liegen. Wenn die Ordinate, welche einem Tischblatte entspricht, O heißt, so ist sie in Teilen des Halbmessers $\frac{O}{r}$, und der Halbmesser des dazu gehörigen Parallelkreises ist $r \cdot \cos \frac{O}{r}$, wie man leicht finden wird. Heißt daher die Höhe des Tischblattes, welches der Ordinate O entspricht, x, so ist

$$800 : x = r : r \cdot \cos \frac{O}{r} \text{ und}$$

$$x = 800 \cdot \cos \frac{O}{r}.$$

Da die Tischblätter so numeriert sind, wie man in dem obigen Schema sieht, und die Ordinate, welche einem Tischblatte entspricht, immer gleich sein muß 800 multipliziert mit der Nummer des Blattes, so ist auch, wenn diese Nummer n heißt, die Höhe des Blattes

$$x = 800 \cdot \cos \frac{800 \cdot n}{r}$$

und folglich der Unterschied dieser Höhe von 800 Ruten

$$800 - x = 800 \left(1 - \cos \frac{800 \cdot n}{r}\right)$$

oder

$$800 - x = 1600 \cdot \sin^2 \frac{400 \cdot n}{r}.$$

Da die Ausdehnung Bayerns von Westen nach Osten nicht sehr beträchtlich ist, so wird der Bogen $\frac{400 \cdot n}{r}$ immer sehr klein sein; man kann ihn daher für seinen Sinus setzen, und dann ist

$$800 - x = \frac{400^2 \cdot 1600}{r^2} \cdot n^2$$

$$= n^2 \cdot 0{,}00005344.$$

Die Einfassung oder Anlage der Tischblätter ist also hiernach folgende: Man beschreibt auf dem Blatte ein Quadrat von 800 Ruten, und dann engt man die Höhe so ein, wie es der Nummer n des Blattes nach dieser Formel zukommt; so daß das Blatt also ein Rechteck wird.

Auftragung der sphärischen Abszissen und Ordinaten auf die Tischblätter.

14. Um eine Ordinate auf das Tischblatt zu tragen, wird sie, in Ruten ausgedrückt, mit 800 dividiert, bis der Rest kleiner als 800 wird. Zu der herausgekommenen ganzen Zahl eins addiert, gibt die Nummer des Blattes, auf welches der Punkt fällt, und der Rest wird von dem östlichen Rande aus in das Blatt getragen, wenn es westlich vom Münchner Meridiane, und vom westlichen Rande aus, wenn das Blatt östlich vom Meridiane liegt.

Die Abszissen sind auf den Münchner Meridian berechnet, die Höhe der Tischblätter wird aber, nach der vorhergehenden Nummer vermindert, damit das Ganze zusammengelegt einen Teil der Kugelfläche bildet. Um also die Abszissen auf die Tischblätter zu tragen, müssen sie vorher auf den Parallel der Ordinate reduziert werden.

Es verhält sich damit ebenso, wie mit der Verkürzung der Tischblätter nach der Höhe. Wenn daher die Abszisse eines Punktes auf dem Meridiane A und seine Ordinate O, so ist die verkürzte Abszisse

$$= A \cdot \cos \frac{O}{r}$$

und hinreichend genau

$$= A - A \frac{O^2}{2r^2}.$$

Um nun eine Abszisse auf das Tischblatt zu tragen, wird die so verkürzte Abszisse mit der Höhe eines Blattes, wie es der Ordinate entspricht und nach der vorhergehenden Nummer berechnet worden ist, dividiert. Die herausgekommene ganze Zahl, um eins vermehrt, gibt die Nummer der Schicht, und der Rest wird auf das Blatt getragen.

Da aber die Höhen der Tischblätter irrationale Zahlen sind, so ist die Division mühsam und leicht Irrtümern unterworfen; wir wollen daher suchen, die Sache einfacher zu machen.

Da die nördlichen und südlichen Grenzlinien der Schichten Ordinatenkreise sind, so ist klar, daß, wenn man die Abszisse auf dem Münchner Meridiane mit 800 dividiert, die herausgekommene ganze Zahl, um eins vermehrt, ebenfalls die Nummer der Schicht angeben muß; man wird also bloß den Rest, der in das Blatt hineinfällt, auf den Parallel der Ordinate zu reduzieren, oder mit $\cos\frac{O}{r}$ zu multiplizieren haben.

In der Tat ist nach dem Obigen die verkürzte Abszisse $A \cdot \cos\frac{O}{r}$; die Höhe des reduzierten Tischblattes ist nach Nr. 13 gleich $800 \cdot \cos\frac{O}{r}$. Dividiert man also die verkürzte Abszisse durch die verringerte Höhe des Tischblattes, so fällt $\cos\frac{O}{r}$ heraus, und man erhält die nämliche Nummer, welche man erhält, wenn man A durch 800 dividiert.

Anstatt $\cos\frac{O}{r}$ kann man, ohne den geringsten Fehler zu begehen, setzen: $1 - \frac{O^2}{2r^2}$. Wenn man also eine Abszisse $= A$ hat, und sie gibt mit 800 dividiert m und zum Rest R, so ist die Nummer der Schicht, in welche der Punkt fällt, $m + 1$, und auf das Blatt wird der Teil

$$R - R \cdot \frac{O^2}{2r^2}$$

von dem nördlichen oder südlichen Rande des Blattes an, welcher München am nächsten liegt, eingetragen. (Oder auch: von dem unteren Rande an, wenn die Abszisse positiv, und von dem oberen Rande an, wenn sie negativ ist.)

Beispiel der Berechnung eines Hauptdreieckes.

15. Das Bisherige enthält alles Wesentliche über die sphärische Berechnung eines Dreiecksnetzes bis zur Auftragung der Punkte auf die Tischblätter. Ich will bloß noch die Berechnung eines Hauptdreiecks zur Erläuterung beifügen.

In dem beigegebenen Schema S. 75 ist das Dreieck *Wendelstein*, *Peissenberg*, *München* berechnet. Die vor den Winkeln stehenden Buchstaben sind die Anfangsbuchstaben der Namen der Punkte, auf denen die Winkel beobachtet sind. Diese Buchstaben werden von oben nach unten so geordnet, wie sie in der Natur von der Linken zur Rechten liegen, (d. h. von der Linken zur Rechten, wenn man sich in der Mitte des Dreiecks befindet), und zwar so, daß der Punkt, welcher durch das Dreieck bestimmt werden soll, in der Mitte steht, wie hier *Peissenberg*. Die Summe der drei Winkel muß gleich sein

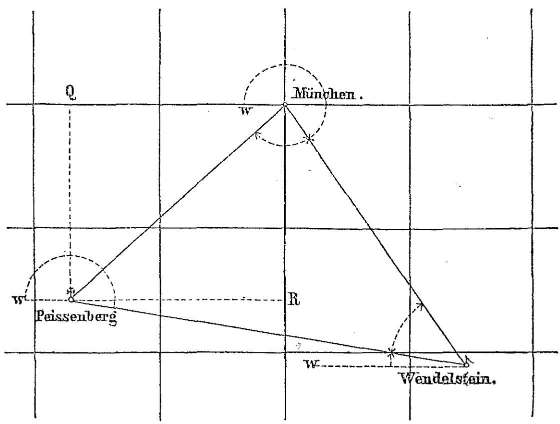

Fig. 6.

180° plus dem sphärischen Exzeß des Dreiecks, in unserem Beispiele 8,24″; sind die beobachteten Winkel dieser Summe nicht gleich, so müssen sie verbessert werden, wobei aber die umliegenden Dreiecke und die Gyri der Stationen welche 360° sein müssen, in Betracht zu ziehen sind.

Rechts von den Winkeln wird der Logarithmus des Sinus des aus vorhergehenden Dreiecken bekannten Bogens (hier *Wendelstein München*) angeschrieben und die Nummer bemerkt, aus welchem Dreiecke er genommen ist. Unter diesem kommt der Logarithmus der Kosekante des mittleren Winkels (hier *Peissenberg*), und wieder unter diesem der log sin des unteren Winkels, (*München*), endlich über den log. sin. des bekannten Bogens der log. sin des oberen Winkels (*Wendelstein*) zu stehen. Werden nun von oben oder unten, immer drei der angeschriebenen Logarithmen zusammen addiert, so erhält man oben den log sin des Bogens zwischen den zwei unteren Punkten (*Peissenberg München*) und unten den log sin des Bogens zwischen den zwei oberen Punkten (*Wendelstein Peissenberg*).

Unter der Rubrik log *PM* und log *WP* werden die log der Bögen *Peissenberg München* und *Wendelstein Peissenberg* in bayrischen Ruten eingesetzt. Man erhält sie aus den Sinussen dieser Bögen, mittels der obenerwähnten Tabelle; z. B. um den log *PM* zu bestimmen, findet man in der Tabelle, mit dem Argumente 7,94:

$$\begin{array}{lll}
6{,}34020879 & & \\
\quad\quad\quad 10 & \text{wegen} & 4 \\
\quad\quad\quad\;\; 2 & & 59 \\
\hline
6{,}34020891 & = \log n & \\
7{,}9445931 & = \log \sin PM & \\
\hline
4{,}2848020 & = \log PM. &
\end{array}$$

Hierauf folgen die Direktionswinkel; sie werden (nach Nr. 11) vom Westpunkte der Ordinatenkreise an gerechnet, und ihr linker Schenkel daher mit w, d. h. West bezeichnet. Bei ihrem Eintrag in das Schema hat man folgende Ordnung einzuhalten: Linker Hand schreibt man die Buchstaben der bekannten Punkte von unten nach oben (*München Wendelstein*), rechter Hand von oben nach unten (*Wendelstein München*); die hierdurch angedeuteten Direktionswinkel selbst sind aus vorhergehenden Dreiecken zu entnehmen. Linker Hand addiert man zu dem Direktionswinkel den Dreieckswinkel des letzten Buchstabens (*München*) und erhält so den Direktionswinkel vom letzten Punkte nach dem zu bestimmenden (*München Peissenberg*); rechter Hand zieht man von dem Direktionswinkel den Dreieckswinkel des ersten Buchstabens (*Wendelstein*) ab und erhält den Direktionswinkel vom ersten Punkt nach dem zu bestimmenden (*Wendelstein Peissenberg*). Man hat also jetzt die Direktionswinkel für *Peissenberg*, von *München* und *Wendelstein* aus; da auch die Distanzen bekannt sind, so hat man die Wahl, ob man Abszisse und Ordinate von *Peissenberg* aus *München* oder *Wendelstein* berechnen will; wir wollen sie hier aus *München* berechnen.

Zuerst sucht man n und m (Nr. 11) und bedient sich dabei folgender Ordnung: Links setzt man den log cos des Direktionswinkels *München-Peissenberg* an und darunter den log der Distanz *München-Peissenberg*. Rechts setzt man den log sin des nämlichen Winkels und darunter den Logarithmus der nämlichen Distanz. Beides addiert, gibt das erste den log n und das zweite den log m.

Die nun folgende weitere Berechnung der Abszissen und Ordinaten geschieht nach den Formeln in Nr. 11, die man auch auf dem Schema selbst wieder findet. Es ist dabei nichts zu erinnern, als daß man auf die Zeichen von n, m und der Ordinate wohl acht haben muß. Da wo n, m, und die Ordinate in der ersten Potenz vorkommen, werden die Zeichen der Formel geändert, wenn die Größen negativ sind. In unserem Beispiele ist der Direktionswinkel 318°, wonach dessen Kosinus positiv, und der Sinus negativ ist; n wird also positiv und m negativ.

Die Ordinaten westlich von *München* und die Abszissen nördlich von *München* sind positiv, die Ordinaten östlich von *München* und die Abszissen südlich von *München* aber negativ; man hat aber gar nicht nötig, hierauf zu merken, weil sich die Zeichen aus den Formeln von selbst ergeben.

Zweiter Teil.

Berechnung der geographischen Positionen der Punkte eines trigonometrischen Netzes.

I.

Eigenschaften der kürzesten Linie auf dem Sphäroide und Bestimmung der Unterschiede der Polhöhen, Längen und Azimute der Endpunkte einer solchen Linie.

1) Wenn man mit einem Instrumente, dessen Fernrohr eine Vertikalbewegung hat, eine gerade Linie auf der Erde absteckt, so kommt, wegen der Krümmung der Erde, der zweite Stab unter den Horizont des ersten und in die Ebene des Vertikals am ersten Stabe. Eben das geschieht am zweiten Stabe mit dem dritten, und man macht den Winkel zwischen dem ersten und dritten Stabe gleich zweien Rechten.

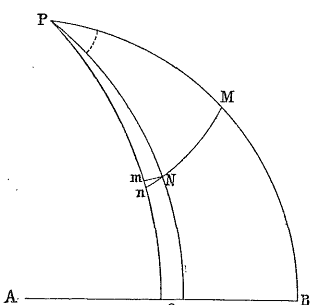

Fig. 7.

In einer so formierten geodätisch geraden Linie sind alle einzelnen Teile (Differentiale) gerade; es ist also einleuchtend, daß diese Linie die kürzeste ist, welche man zwischen ihren zwei Endpunkten auf dem Erdsphäroide ziehen kann.

2) Etwas dem Abstecken ganz ähnliches geschieht bei der Triangulation eines Landes. Eine durch mehrere Dreiecke bestimmte Entfernung zwischen zwei Punkten wird auch die Eigenschaft der geodätisch geraden Linie haben, und man kann die in dem Netze bestimmten Distanzen als Linien der klein-

sten Entfernung ansehen. Dies vorausgesetzt, sei in vorherstehender Figur 7 AB ein Teil des Äquators des Erdsphäroids und P der Pol. MN sei eine geodätisch gerade Linie von der Länge S, die mit dem Meridiane PB den Winkel $\alpha = BMN$ macht. Die Polhöhe des als gegeben angenommenen Punktes M sei λ, die des Punktes N sei φ, und der Längenunterschied der Punkte M und N oder der Winkel NPM sei w. Der Krümmungshalbmesser des Meridians in N sei R, und der Halbmesser des Parallels, der durch N geht, sei ϱ.

An den Meridian PNQ ziehe man noch den unendlich nahen Pmn und mache $Pm = PN$.

Man wird also dem zufolge haben:

$$mN = \varrho dw$$

$$mn = R d\varphi$$

$$Nn = dS$$

und weil das unendlich kleine Dreieck mNn bei m rechtwinklig ist:

$$Nn = \sqrt{(mN^2 + mn^2)}$$

oder:

$$dS = \sqrt{(\varrho^2 dw^2 + R^2 d\varphi^2)}.$$

Es sei

$$d\varphi = p dw,$$

also

$$dS = dw \sqrt{(\varrho^2 + R^2 p^2)},$$

und wenn man, der Kürze wegen, setzt:

$$\sqrt{(\varrho^2 + R^2 p^2)} = u,$$

$$dS = u dw.$$

Da die Linie S die Eigenschaft hat, daß sie die kürzeste ist, welche man auf dem Sphäroide zwischen den Punkten M und N ziehen kann, so muß ihr Wert, oder das Integral $\int u dw$, für jeden Wert von φ ein Minimum sein.

u ist eine Funktion von φ und p, indem R und ϱ bloß, wie man weiß, Funktionen von den Variabeln φ sind; es ist also das totale Differential von u:

$$du = \left(\frac{du}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{du}{dp}\right) dp, \tag{1}$$

und die Bedingung, daß $\int u dw$ ein Minimum sein soll, gibt die Gleichung:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dp}\right)}{dw}$$

(Siehe *Euleri* Methodus inveniendi lineas curvas usw. Kap. II Prop. 3 et 5. Auch Théorie des fonctions analytiques, par Mr. *La Grange* no. 171.)

Setzt man nun in (1) anstatt $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)$ dessen eben gefundenen Wert, so hat man:

$$du = \frac{d\varphi}{dw} \cdot d\left(\frac{du}{dp}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right) pd,$$

und da
$$\frac{d\varphi}{dw} = p,$$

(2)
$$u = p \cdot \left(\frac{du}{dp}\right) + \text{konstans}.$$

Um die Konstante zu bestimmen, seien ϱ', R', p' und u' dieselben Größen für den Punkt M, der als gegeben angenommen wird. Man hat also:

$$\text{konstans} = u' - p'\left(\frac{du'}{dp'}\right),$$

und um diesen Wert der Konstanten weiter zu entwickeln, sei der Winkel nNQ, welchen die Linie S mit dem Meridiane PNQ macht, η, so ist

$$nN : mN = 1 : \sin \eta$$

oder, da $nN = udw$ und $mN = \varrho dw$,

(3)
$$\varrho = u \sin \eta.$$

Aber in M ist $\eta = \alpha$, man hat also dann:

$$\varrho' = u' \sin \alpha.$$

Da ferner
$$u' = \sqrt{(\varrho'^2 + R'^2 p'^2)},$$

so ist
$$p'\left(\frac{du'}{dp'}\right) = \frac{R'^2 p'^2}{u'};$$

folglich durch Substitution:

$$\text{konstans} = \frac{\varrho'^2}{u'} = \varrho' \cdot \sin \alpha.$$

Wir wollen nun, da die Konstante bestimmt ist, die Gleichung (2) wieder vornehmen. Setzt man darin den eben gefundenen Wert der Konstanten, so ergibt sich daraus:

$$(4) \qquad p = \frac{u - \varrho' \sin\alpha}{\left(\frac{du}{dp}\right)}.$$

Da $dw = \frac{d\varphi}{p}$ und $dS = u dw$, so hat man:

$$(5) \qquad dw = \frac{\left(\frac{du}{dp}\right) d\varphi}{u - \varrho' \sin\alpha} \qquad \text{und}$$

$$(6) \qquad dS = \frac{u\left(\frac{du}{dp}\right) d\varphi}{u - \varrho' \sin\alpha}.$$

Dies sind nun die zwei Gleichungen, welche uns zur vollständigen Auflösung des Problems führen werden.

Wir wollen sie durch ϱ, R und φ ausdrücken.

Man hat: $$\left(\frac{du}{dp}\right) = \frac{R^2 p}{u}.$$

Da nun nach (4) auch: $$\left(\frac{du}{dp}\right) = \frac{u - \varrho' \sin\alpha}{p},$$

so ist: $$R^2 p^2 = u^2 - u\varrho' \sin\alpha.$$

Substituiert man in der letzten Gleichung für u dessen Wert, nämlich $\sqrt{(\varrho^2 + R^2 p^2)}$, so findet man:

$$p = \pm \frac{\varrho}{R\varrho' \sin\alpha} \cdot \sqrt{(\varrho^2 - \varrho'^2 \sin^2\alpha)}$$

$$u = \frac{\varrho^2}{\varrho' \sin\alpha}.$$

Das Zeichen von p ist zweideutig. Es ist aber anfänglich gesetzt worden $p = \frac{d\varphi}{dw}$, und in obiger Figur sieht man, daß bei der dort angegebenen Lage die Linie MN oder, wenn das von Süden nach Westen gezählte Azimut kleiner als 90° ist, die Länge w abnimmt, wenn die Polhöhe φ zunimmt; wir haben also p negativ zu setzen.

Wir hatten in (3)

$$\sin \eta = \frac{\varrho}{u},$$

setzt man hier anstatt u dessen zuletzt gefundenen Wert, so hat man:

$$\sin \eta = \frac{\varrho'}{\varrho} \cdot \sin \alpha. \tag{7}$$

Diese Formel dient dazu das Azimut η am Endpunkte N der Linie NM zu finden, wenn das in M, d. h. α, gegeben ist.

Es ist $\qquad d\varphi = p dw$ und $dS = u dw$.

Wenn man in ihnen anstatt p und u die nun gefundenen Werte setzt, so erhält man:

$$dw = -\frac{\varrho' \sin \alpha \, R d\varphi}{\varrho \sqrt{(\varrho^2 - \varrho'^2 \sin^2 \alpha)}} \tag{8}$$

$$dS = -\frac{\varrho R d\varphi}{\sqrt{(\varrho^2 - \varrho'^2 \sin^2 \alpha)}}. \tag{9}$$

Es ist nicht möglich, diese Differentiale in endlichen Ausdrücken zu integrieren; wir wollen sie daher in Reihen entwickeln, welche nach den Potenzen der Abplattung der Erde fortgehen.

Diese Größe ist sehr klein, so daß man die Quadrate und höheren Potenzen davon vernachlässigen kann.

Wenn b die halbe Erdachse und ε die Abplattung bedeutet, ist bekanntlich:

$$\varrho' = b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cos^2 \lambda) \cos \lambda$$
$$\varrho = b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cos^2 \varphi) \cos \varphi$$
$$R = b\,(1 + 2\varepsilon - 3\varepsilon \cos^2 \varphi),$$

welche Ausdrücke bis auf Größen von der Ordnung ε^2 genau sind.

Substituiert man nun diese Werte von ϱ', ϱ und R in den Gleichungen (8) und (9) und läßt beständig die zweiten und höheren Potenzen von ε weg, so wird man Ausdrücke finden, in denen bloß φ veränderlich ist.

Ich lasse diese Substitutionen hier weg, weil sie viel Raum einnehmen würden.

Man setze noch der Kürze wegen:

$$\sin\alpha \cos\lambda = \cos\varkappa$$

und
$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varkappa} = \cos\psi, \frac{\sin\lambda}{\sin\varkappa} = \cos\mu;$$

wo also $\varkappa$ und μ beständig und ψ veränderlich ist. Dies vorausgesetzt, wird man erhalten:

$$dw = \frac{\cos\varkappa\, d\psi}{1 - \sin^2\varkappa \cos^2\psi} - \varepsilon \cos\varkappa \cdot d\psi$$
$$- \varepsilon \frac{\cos^2\varkappa \cos^2\alpha \cos^2\lambda}{\sin^2\varkappa} \cdot \frac{d\psi}{\sin^2\psi}$$

$$\frac{dS}{b} = (1 - \varepsilon \sin^2\lambda)\, d\psi + 3\varepsilon \sin^2\varkappa \cos^2\psi\, d\psi$$
$$- \varepsilon \frac{\cos^2\alpha \cos^2\lambda}{\sin^2\varkappa \sin^2\psi} \cdot d\psi + \varepsilon \cos^2\alpha \cos^2\lambda \cot^2\psi\, d\psi,$$

und wenn man diese Gleichungen integriert

$$(10)\quad w = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} \frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos\varkappa}\right) - \varepsilon\, \psi \cos\varkappa$$
$$+ \varepsilon \cdot \frac{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\lambda \cos^2\varkappa}{\sin^2\varkappa} \cot\psi + \text{konstans.}$$

$$(11)\quad \frac{S}{b} = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2\varkappa\right) \psi + \frac{3}{4}\varepsilon \sin^2\varkappa \sin 2\psi$$
$$+ \varepsilon \cos^2\alpha \cos^2\lambda \cot^2\varkappa \cot\psi + \text{konstans.}$$

Die Konstanten müssen durch die Bedingung bestimmt werden, daß für $\psi = \lambda : w = 0$, $S = 0$ und $\psi = \mu$ wird. Man wird also haben:

$$(12)\quad w = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} \frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos\varkappa}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} \frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)$$
$$- \varepsilon(\psi - \mu) \cos\varkappa - \varepsilon \frac{\cos^2\alpha \cos^2\lambda \cos^2\varkappa}{\sin^2\varkappa} (\operatorname{cotg}\mu - \operatorname{cotg}\psi)$$

$$(13)\quad \frac{S}{b} = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2\varkappa\right)(\psi - \mu) + \frac{3}{4}\varepsilon \sin^2\varkappa (\sin 2\psi$$
$$- \sin 2\mu) - \varepsilon \cos^2\alpha \cos^2\lambda \cot^2\varkappa (\cot\mu - \cot\psi).$$

Man nenne, der Bequemlichkeit wegen, $\frac{S}{b} = s$, so daß also s die Linie MN in Teilen der halben Erdachse ausgedrückt bedeutet, und revertiere die Gleichung (13) mittels des *La Grange*schen Theorems, so wird man erhalten:

$$\psi = \mu + s\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2 z\right) - \frac{3}{2}\varepsilon \sin^2 z \cos(2\mu + s) \sin s$$
$$+ \varepsilon \cos^2 \alpha \cos^2 \lambda \cot^2 z \frac{\sin s}{\sin \mu \sin(\mu + s)}.$$

In den Gliedern von der Ordnung ε kann man anstatt $\sin s$, s, $\cos(2\mu + s) = \cos 2\mu$ und $\sin(\mu + s) = \sin \mu$ setzen; der daraus entstehende Fehler ist nur von der Ordnung εs^2 und daher ganz unmerklich. Man wird also durch gehörige Zusammenziehung erhalten:

(14) $$\psi = \mu + s - 2\varepsilon s + 3\varepsilon s \cos^2 \lambda.$$

In der Gleichung (12) kann man in den Gliedern, die von der Ordnung ε sind, überall $\mu + s$ anstatt ψ setzen, ohne dadurch einen Fehler zu begehen, der größer als von der Ordnung ε^2 wäre; auch kann s^2 vernachlässigt werden.

Man wird also haben:

$$\cot \mu - \cot \psi = \frac{s}{\sin^2 \mu}$$

und mithin:

(15) $$w = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} \frac{\operatorname{tang} \psi}{\cos z}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} \frac{\operatorname{tang} \mu}{\cos z}\right) - 2\varepsilon s \cdot \cos z.$$

Mittels dieser Formeln (14) und (15) kann man nun Polhöhe und Länge des Punktes N finden; denn wenn ψ gegeben ist, so hat man:

$$\sin \varphi = \sin z \cos \psi.$$

Um auch das Azimut zu finden, haben wir in (7)

$$\sin \eta = \frac{\varrho'}{\varrho} \sin \alpha.$$

Es ist aber

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} \cdot (1 + \varepsilon \sin^2 \lambda - \varepsilon \sin^2 \varphi);$$

η ist der Winkel QNn in obiger Figur.

Das Azimut von M in N, welches wir α' nennen und von Süden über Westen usw. bis 360° zählen wollen, wird also sein $\alpha' = \eta + 180^\circ$ und mithin:

$$(16) \quad \sin(\alpha' - 180^\circ) = \sin\alpha \frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}(1 + \varepsilon \sin^2\lambda - \varepsilon \sin^2\varphi).$$

3) Die Formeln (14), (15) und (16), worin die vollständige Auflösung unseres Problems enthalten ist, sind ganz genau, so daß, wenn man $\varepsilon = 0$ setzt, man die bekannten sphärisch trigonometrischen Formeln finden würde, welche für diese Fälle stattfänden, wenn die Erde eine Kugel wäre. Sie sind aber zum praktischen Gebrauche nicht sehr bequem, weil man die trigonometrischen Funktionen sehr genau in den Logarithmentafeln aufschlagen müßte; wir wollen daher überall die Bogen selbst anstatt ihrer trigonometrischen Funktionen zu erhalten suchen.

Wir wollen zuerst den Ausdruck für die Polhöhe φ vornehmen. Man hat bekanntlich allgemein:

$$\cos(\mu + x) = \cos\mu - x\sin\mu - \frac{x^2}{1\cdot 2}\cos\mu + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\sin\mu + \ldots$$

und folglich:

$$\cos\psi = \cos\mu - s(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon\cos^2\lambda)\sin\mu - \frac{1}{2}s^2\cos\mu + \frac{1}{6}s^3\sin\mu,$$

wo man in den Gliedern von der Ordnung s^2 und s^3 die Größe ε vernachlässigt hat. Es wird also sein:

$$\sin\varphi = \sin z\cos\mu - s(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon\cos^2\lambda)\sin z\sin\mu - \frac{1}{2}s^2\sin z\cos\mu + \frac{1}{6}s^3\sin z\sin\mu.$$

Es ist aber nach der vorhergehenden Nummer

$$\sin z\cos\mu = \sin\lambda$$
$$\sin z\sin\mu = \cos\alpha\cos\lambda.$$

Diese Werte substituiert, wird man haben:

$$\sin\lambda - \sin\varphi = s(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon\cos^2\lambda)\cos\alpha\cos\lambda + \frac{1}{2}s^2\sin\lambda - \frac{1}{6}s^3\cos\alpha\cos\lambda.$$

Wenn f und F irgend Funktionen bedeuten, und man macht:

$$F(\lambda + x) - F(\lambda) = n$$

und $$z' = \frac{df(\lambda)}{dF(\lambda)},\ z'' = \frac{dz'}{dF(\lambda)},\ z''' = \frac{dz''}{dF(\lambda)} \text{ usw.}$$

so ist

$$f(\lambda + x) - f(\lambda) = nz' + \frac{n^2}{1 \cdot 2} z'' + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z''' + \ldots$$

(Siehe Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante p. *Soldner*, no. 12.)

Wendet man dieses allgemeine Theorem auf unseren Fall an, so kann man $\lambda - \varphi$ durch eine Reihe ausdrücken, welche nach den Potenzen von $\sin \lambda - \sin \varphi$, oder dessen Wert fortgeht. Denn es ist hier $f(\lambda + x) = \lambda + x = \varphi$, $f(\lambda) = \lambda$

$$n = -(\sin \lambda - \sin \varphi)$$

$$z' = \frac{1}{\cos \lambda},\ z'' = \frac{\sin \lambda}{\cos^3 \lambda},\ z''' = \frac{\cos^2 \lambda + 3 \sin^2 \lambda}{\cos^5 \lambda} \text{ usw.},$$

und damit erhält man:

$$(17)\quad \varphi = \lambda - s \cdot \cos \alpha (1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cos^2 \lambda - \frac{1}{2} s^2 \sin^2 \alpha \tang \lambda + \frac{1}{6} s^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha (1 + 3 \tang^2 \lambda).$$

Wir wollen nun zu der Formel (15), d. h. zur Bestimmung der Länge übergehen. w ist zwar selbst schon im Bogen gegeben, aber $\operatorname{arc}\left(\tang \frac{\tang \psi}{\cos z}\right) - \operatorname{arc}\left(\tang \frac{\tang \mu}{\cos z}\right)$ ist sehr mühsam zu berechnen; wir müssen daher diese Differenz durch s ausdrücken. Da nach (14)

$$\psi = \mu + s(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cos^2 \lambda),$$

so wollen wir setzen:

$$\psi = \mu + i,$$

und dann hat man nach dem bekannten *Taylor*schen Theoreme:

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu+i}{\cos\varkappa}\right)=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)+i\,\frac{d\cdot\left(\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)}{d\mu}$$
$$+\frac{i^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2\cdot\left(\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)}{d\mu^2}+\ldots\ldots$$

wo, wie man leicht findet

$$\frac{d\cdot\left(\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)}{d\mu}=\frac{\cos\varkappa}{1-\sin^2\varkappa\cos^2\mu}$$

$$\frac{d^2\cdot\left(\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)}{d\mu^2}=-\frac{2\cos\varkappa\sin^2\varkappa\sin\mu\cos\mu}{(1-\sin^2\varkappa\cos^2\mu)^2}$$

$$\frac{d^3\cdot\left(\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)}{d\mu^3}=-\frac{2\cos\varkappa\sin^2\varkappa}{(1-\sin^2\varkappa\cos^2\mu)^3}$$
$$\{\cos^2\mu-\sin^2\mu-\sin^2\varkappa\cos^4\mu-3\sin^2\varkappa\sin^2\mu\cos^2\mu\}$$

Es ist aber nach dem Obigen:

$$\sin\varkappa\cdot\cos\mu=\sin\lambda$$
$$\sin\varkappa\cdot\sin\mu=\cos\alpha\cos\lambda.$$

Machen wir diese Substitutionen, so erhalten wir die obigen Differentialquotienten der Ordnung nach wie folgt:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\lambda},\quad-\frac{\sin 2\alpha\sin\lambda}{\cos^2\lambda},\quad\frac{2\sin\alpha}{\cos^3\lambda}\{\cos^2\alpha\,(1+3\sin^2\lambda)-\sin^2\lambda\}$$

und man hat:

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos\varkappa}\right)-\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\varkappa}\right)=i\,\frac{\sin\alpha}{\cos\lambda}-\frac{i^2}{2}\frac{\sin 2\alpha\sin\lambda}{\cos^2\lambda}$$
$$+\frac{i^3}{3}\frac{\sin\alpha}{\cos^3\lambda}\{(1+3\sin^2\lambda)\cos^2\alpha-\sin^2\lambda\}.$$

Oben haben wir gemacht:

$$i=s\,(1-2\varepsilon+3\varepsilon\cos^2\lambda).$$

Substituiert man diese Werte in (15), so wird man endlich erhalten:

$$(18)\quad w = s\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\lambda}(1-2\varepsilon+\varepsilon\cos^2\lambda)-\frac{1}{2}s^2\frac{\sin 2\alpha\sin\lambda}{\cos^2\lambda}$$
$$+\frac{1}{3}s^3\frac{\sin\alpha}{\cos^3\lambda}(3\cos^2\alpha\sin^2\lambda+\cos^2\alpha-\sin^2\lambda).$$

Hier haben wir also die Längendifferenz in unmittelbar gegebenen Größen ausgedrückt; drückt man aber λ durch φ, nach (17) aus, so wird die Formel einfacher, wie man gleich sehen wird.

Man hat allgemein:

$$\cos(\varphi+i)=\cos\varphi-i\sin\varphi-\frac{i^2}{1\cdot 2}\cos\varphi+\ldots$$

Wendet man dies auf (17) an und vernachlässigt s^3 und εs, weil hier ohnehin schon alles von der Ordnung s ist, so hat man:

$$\frac{1}{\cos\lambda}=\frac{1}{\cos\varphi}\left\{1+s\cos\alpha\operatorname{tang}\varphi+\frac{s^2}{2\cos^2\varphi}(\cos^2\alpha+\sin^2\varphi)\right\}.$$

In dem Gliede von der Ordnung s^2 setzt man, anstatt $\sin\lambda$, $\sin\varphi+s\cdot\cos\alpha\cos\varphi$, und in den Gliedern von der Ordnung s^3 und εs kann man unmittelbar φ für λ setzen. Dies vorausgesetzt, wird

$$(19)\quad w=s\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}(1-2\varepsilon+\varepsilon\cos^2\varphi)-\frac{s^3}{6}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}+\frac{s^3}{6}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\varphi}.$$

Wir wollen nun noch die Formeln für das Azimut α' umformen.

Wir hatten in (16) der vorigen Nummer:

$$\sin(\alpha'-180^\circ)=\sin\alpha\cdot\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}(1+\varepsilon\sin^2\lambda-\varepsilon\sin^2\varphi)$$

oder:

$$\sin(\alpha'-180^\circ)=\sin\alpha\cdot\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}+\frac{1}{2}\varepsilon s\cdot\sin 2\alpha\sin 2\varphi.$$

Auf die nämliche Art wie vorhin wird, indem man die Glieder von den Ordnungen s^3 und εs noch mitnimmt:

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}=1-s\cdot\cos\alpha\operatorname{tang}\varphi(1-2\varepsilon+3\varepsilon\cos^2\varphi)$$
$$-\frac{s^2}{2}(\sin^2\alpha\operatorname{tang}^2\varphi+\cos^2\alpha)-\frac{s^3}{6}\cos\alpha\operatorname{tang}\varphi(6\sin^2\alpha-1).$$

Substituiert man diesen Wert von $\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}$ in dem Ausdrucke für das Azimut, so wird man erhalten:

$$\sin(\alpha' - 180^\circ) - \sin\alpha = -s\cdot\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\varphi) - \frac{1}{2}s^2\sin\alpha\,(\sin^2\alpha\,\mathrm{tang}^2\varphi + \cos^2\alpha) - \frac{s^3}{6}\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(6\sin^2\alpha - 1).$$

Wendet man hierauf wieder den oben angeführten allgemeinen Satz an, indem man setzt: $\alpha' - 180^\circ = \alpha + x$, $F(\alpha) = \sin\alpha$, $f(\alpha) = \alpha$, $n = -s\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\varphi)$ — usw. so werden:

$$z' = \frac{1}{\cos\alpha},\quad z'' = \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha},\quad z''' = \frac{\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha}{\cos^5\alpha}$$

und damit endlich:

$$(20)\quad \alpha' = 180^\circ + \alpha - s\cdot\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\varphi) - \frac{s^2}{4}\sin 2\alpha - \frac{s^3}{6}\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(\sin^2\alpha\cdot\sec^2\varphi - \cos 2\alpha).$$

4) Wir wollen hier, um die Übersicht zu erleichtern, die bisher gefundenen Resultate zusammenstellen.

Wenn: s die Länge der Linie in Teilen der halben Erdachse,
λ die gegebene Polhöhe,
φ die gesuchte,
α das gegebene Azimut, α' das gesuchte $\}$ von Süden über Westen usw. bis 360° gezählt,
w die Längendifferenz,
ε die Abplattung der Erde bezeichnet, und

$$\sin\alpha\cos\lambda = \cos z,\ \frac{\sin\alpha}{\sin z} = \cos\mu,\ \frac{\sin\varphi}{\sin z} = \cos\psi,$$

so hat man zur genauen Auflösung:

$$(14)\qquad \psi = \mu + s\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon\cos^2\lambda)$$

dann: $\sin\varphi = \sin z\cdot\cos\psi$

$$(15)\quad w = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}\frac{\mathrm{tang}\,\psi}{\cos z}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}\,\frac{\mathrm{tang}\,\mu}{\cos z}\right) - 2\varepsilon\cdot s\cdot\cos z$$

und

$$(16)\quad \sin(\alpha' - 180^\circ) = \sin\alpha \frac{\cos\lambda}{\cos\varphi} + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot s \cdot \sin 2\alpha \sin 2\varphi$$

und die Näherungsformeln:

$$(17)\quad \varphi = \lambda - s \cdot \cos\alpha\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon\cos^2\lambda) - \frac{s^3}{2}\sin^2\alpha \operatorname{tang}\lambda + \frac{s^3}{6}\cos\alpha\sin^2\alpha\,(1 + 3\operatorname{tang}^2\lambda)$$

$$(19)\quad w = s \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\varphi) - \frac{s^3}{6} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} + \frac{s^3}{6} \cdot \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\varphi}$$

$$(20)\quad \alpha' = 180^\circ + \alpha - s \cdot \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\varphi) - \frac{s^2}{4}\sin 2\alpha - \frac{s^3}{6}\sin\alpha\operatorname{tang}\varphi\,(\sin^2\alpha\sec^2\varphi - \cos 2\alpha),$$

wo alle Glieder, die von s abhängen, in Teilen der halben Erdachse ausgedrückt sind.

5) Wenn man in diesen Formeln $\alpha = 90^\circ$ macht, so erhält man die Ausdrücke für die sogenannte Perpendiculaire à la méridienne d. h. für Abszissen und Ordinaten. In diesem Falle wird $\varkappa = \lambda$, $\mu = 0$ und λ die Polhöhe des Punktes, wo die Abszisse und Ordinate einander schneiden; wir wollen zur Unterscheidung diese Polhöhe mit λ' bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, wird man haben:

$$\psi = s\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon\cos^2\lambda')$$

und dann:

$$(21)\quad \sin\varphi = \sin\lambda'\cos\psi \text{ und}$$

$$(22)\quad w = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos\lambda'}\right) - 2\varepsilon \cdot s \cdot \cos\lambda'$$

und folgende Näherungsformeln:

$$(23)\quad \varphi = \lambda' - \frac{1}{2}s^2 \cdot \operatorname{tang}\lambda'$$

$$(24)\quad w = \frac{s}{\cos\varphi}(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \cos^2\varphi) + \frac{s^3}{6} \cdot \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\cos\varphi}$$

$$(25)\quad \alpha' = 270^\circ - s \cdot \operatorname{tang}\varphi\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \cos^2\varphi) - \frac{s^3}{6}\operatorname{tang}\varphi\,(1 + \sec^2\varphi).$$

In diesen Formeln bedeutet s die Ordinate in Teilen der halben Erdachse ausgedrückt.

Wir müssen nun noch λ' bestimmen. Wenn a die Abszisse, in Teilen der halben Erdachse ausgedrückt, bedeutet, so hat man nach (17), wenn man $\alpha = 180^\circ$ setzt, weil die Abszisse im Meridian liegt:

$$\lambda' = \lambda + a\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cdot \cos^2 \lambda),$$

und so wird:

$$(23) \quad \varphi = \lambda + a\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cos^2 \lambda) - \frac{s^2}{2} \operatorname{tang} \lambda - \frac{s^2}{2} \cdot \frac{a}{\cos^2 \lambda}.$$

Wir haben nun alle Formeln, welche zur Auflösung des Problems gehören. Ich muß nur noch bemerken, daß in ihnen alles in Teilen der halben Erdachse ausgedrückt ist; will man es in Sekunden haben, so müssen die Glieder, welche von s und a abhängen, mit $\sin 1''$ dividiert werden.

6) Zum Beschlusse wollen wir hier noch die Natur und Eigenschaften der kürzesten Linie auf dem Sphäroide näher betrachten und untersuchen, welchen Weg eine solche Linie nimmt, wenn sie auf der Oberfläche der Erde ins Unendliche fortgesetzt wird.

Wir wollen hierzu den einfachsten Fall nehmen, nämlich den der Perpendiculaire à la méridienne.

Die Näherungsformeln sind in der Voraussetzung gefunden worden, daß s nur einen oder zwei Grade beträgt; wir müssen also die genauen Formeln nehmen.

Wenn man in (21) anstatt ψ seinen Wert setzt, so hat man:

$$\sin \varphi = \sin \lambda' \cdot \cos \big(s\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cdot \cos^2 \lambda')\big),$$

oder wenn man die höheren als zweiten Potenzen von ε vernachlässigt:

$$\sin \varphi = \sin \lambda' \cdot \cos s + \varepsilon \cdot s\,(2 - 3 \cos^2 \lambda') \sin \lambda' \sin s \\ - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \cdot s^2\,(2 - 3 \cos^2 \lambda')^2 \sin \lambda' \cos s.$$

Nun sei $s = 2\pi \cdot n$, wo 2π der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ und n irgend eine Zahl bedeutet, so ist für alle ganzzahligen Werte von n:

$$\sin 2n\pi = 0 \text{ und } \cos 2n\pi = 1$$

folglich: $\sin \varphi = \sin \lambda' - 2 (\varepsilon n \pi)^2 (2 - 3 \cos^2 \lambda')^2 \sin \lambda'$

oder: $\sin \varphi = \sin \{\lambda' - 2 (\varepsilon n \pi)^2 (2 - 3 \cos^2 \lambda')^2 \operatorname{tang} \lambda'\}$

und also: $\varphi = \lambda' - 2 (\varepsilon n \pi)^2 (2 - 3 \cos^2 \lambda')^2 \operatorname{tang} \lambda'$.

Wenn man hierin $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ usw. setzt und die dazu gehörigen φ mit φ', φ'' φ''' usw. bezeichnet, so werden φ', φ'' usw. die Polhöhen sein, unter welchen die Perpendiculaire nach dem ersten — zweiten — usw. Umgang um die ganze Erde den Meridian, von welchem sie unter der Polhöhe λ' ausgegangen ist, wieder schneidet. Wenn z. B. eine solche Perpendiculaire in München vom Meridiane abgeht, so wird sie den Meridian nach dem ersten Umgange 21,5″ südlich von München wieder schneiden.

Man sieht also, daß die Linie nie wieder in den nämlichen Punkt zurückkehrt, sondern spiralförmig um das Erdsphäroid sich windet und mithin eine Linie von doppelter Krümmung ist. Nur im Äquator, wo $\lambda' = 0$ ist, bleibt φ immer Null, oder die Linie bleibt im Äquator und ist mithin nicht von doppelter Krümmung. Auch wenn sie vom Pole ausgeht, wo $\lambda' = 90^\circ$ und $\cos \lambda' = 0$, bleibt der Wert von w in (22) immer 90°, d. h. die Linie geht beständig in demselben Meridian fort; in allen anderen Fällen ist sie von doppelter Krümmung.

7) Die vorstehende Untersuchung über die Natur der kürzesten Linie auf dem Sphäroide kann eine Bedenklichkeit gegen die allgemeine Anwendung der durch sie erhaltenen Formeln auf die Vermessung eines Landes erregen. Es ist zwar wahr, wie eingangs erwähnt worden ist, daß man eine durch mehrere Dreiecke bestimmte Distanz als kürzeste Linie auf dem Sphäroide betrachten kann; aber wird dies auch der Fall sein, wenn es darauf ankommt, in einem wirklich gemessenen Dreiecke Polhöhe, Länge und Azimut eines Punktes aus denen des anderen zu finden?

Die Dreieckswinkel und Azimute werden durch Vertikalebenen bestimmt; die kürzeste Linie ist aber von doppelter Krümmung, und der Winkel, welchen zwei zusammenstoßende kürzeste Linie machen, kann eigentlich gar nicht gemessen werden. Er ist der ihrer Tangenten am Durchschnittspunkte, und wenn man die Winkel mißt, visiert man auf die Endpunkte der Linien.

Es ist zwar nicht wahrscheinlich, daß der Unterschied, welcher von der doppelten Krümmung herrührt, praktisch merklich sein wird; indessen dürfte es doch gut sein, Polhöhen, Längen usw. aus der Betrachtung der Art und Weise wie die Dreiecke gemessen werden, abzuleiten und dann die Resultate zu vergleichen.

In einem früheren Teile dieser Abhandlung ist die sphärische Berechnung eines Dreiecksnetzes vorgetragen worden; wir wollen also Polhöhe, Länge und Azimut auf einer sphärischen Oberfläche berechnen und nachher die Verbesserungen bestimmen, welche die Abplattung der Erde dabei notwendig macht.

II.

Bestimmung der Polhöhen, Längen und Azimute aus sphärischen Distanzen und Winkeln.

1) Wenn in nebenstehender Figur $MN = s$ die Entfernung der zwei Punkte M und N in Teilen des Halbmessers ausgedrückt, PM das Komplement der Polhöhe λ des Punktes M, welcher als gegeben angenommen wird, PN das Komplement der Polhöhe φ von N, $NPM = w$ die Längendifferenz beider Punkte, $NMR = \alpha$ das Azimut von N in M und $QNM = \alpha'$ das Azimut von M in N, beide vom Mittag über Westen usw. gezählt, bezeichnet, so hat man in dem sphärischen Dreiecke NPM:

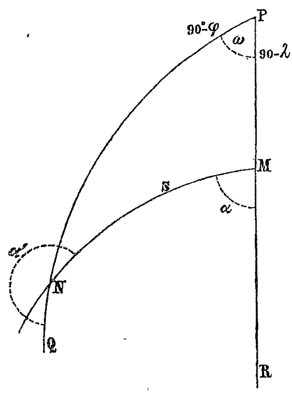

Fig. 8.

$$(1)\quad \sin\varphi = \cos s \sin\lambda - \sin s \cos\lambda \cos\alpha$$

$$(2)\quad \sin w = \frac{\sin s \sin\alpha}{\cos\varphi}$$

$$(3)\quad \sin(\alpha' - 180^\circ) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\lambda}{\cos\varphi}.$$

Diese Formeln sind genau, aber praktisch ebenso wenig anwendbar als die genauen Formeln in Nr. 2 der ersten Abteilung.

Um die zu bestimmenden Größen in Bögen zu erhalten, könnten wir uns wieder der nämlichen Formeln bedienen, welche wir in der ersten Abteilung schon gefunden haben, wenn wir dort $\varepsilon =$ Null setzten, weil in diesem Falle die Formeln für die Kugel gelten. Aber wir wollen sie hier lieber noch einmal entwickeln; die Übereinstimmung der auf so verschiedenen Wegen gefundenen Formeln wird dann als Beweis der gegenseitigen Richtigkeit dienen.

2) Indem man die vierten und höheren Potenzen von s vernachlässigt, erhält man aus (1):

$$\sin\lambda - \sin\varphi = s\cdot\cos\alpha\cdot\cos\lambda + \frac{s^2}{2}\sin\lambda - \frac{s^3}{6}\cos\alpha\cdot\cos\lambda$$

und hieraus ergibt sich, wenn man wieder das in Nr. 3 der ersten Abteilung angeführte Theorem anwendet:

$$(4)\qquad \varphi = \lambda - s\cdot\cos\alpha - \frac{s^2}{2}\sin^2\alpha\,\operatorname{tang}\lambda + \frac{s^3}{6}\cos\alpha\,\sin^2\alpha\,(1+3\,\operatorname{tang}^2\lambda).$$

Um aus (2) die Längendifferenz auch im Bogen zu finden, hat man, da w und s sehr klein sind, so daß man die vierten und höheren Potenzen dieser Größen vernachlässigen kann:

$$w = \sin w + \frac{\sin^3 w}{6}$$

und also

$$w = \frac{\sin s\sin\alpha}{\cos\varphi} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\sin^3 s\sin^3\alpha}{\cos^3\varphi}.$$

Setzt man aber auch für $\sin s$ dessen Wert:

$$\sin s = s - \frac{s^3}{6},$$

so wird man erhalten:

$$(5)\qquad \mathrm{w} = s\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} - \frac{s^3}{6}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} + \frac{s^3}{6}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\varphi}.$$

Um auch noch α' in (3) in Bogen auszudrücken, wird man bemerken, daß die Winkel $\alpha' - 180^\circ$ und α nur um die Konvergenz der Meridiane verschieden sind, folglich ihre Differenz von der Ordnung s ist. Nach (4) ist auch die Differenz von φ und λ von der Ordnung s, wir wollen daher zuerst $\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}$ durch s ausdrücken.

Allgemein ist bekanntlich:

$$\cos(\varphi + i) = \cos\varphi - i\sin\varphi - \frac{i^2}{2}\cos\varphi + \frac{i^3}{6}\sin\varphi + \ldots$$

Wendet man dieses auf (4) an, so wird man erhalten:

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi} = 1 - s\cdot\cos\alpha\operatorname{tang}\varphi - \frac{s^2}{2}(\sin^2\alpha\operatorname{tang}\lambda\operatorname{tang}\varphi + \cos^2\alpha)$$
$$+ \frac{s^3}{6}\cos\alpha\,\{\operatorname{tang}\varphi + 3\sin^2\alpha\operatorname{tang}\lambda\,(\operatorname{tang}\lambda\operatorname{tang}\varphi - 1)\}.$$

In dem Gliede von der Ordnung s^3 kann man φ für λ setzen, weil der Unterschied nur von der Ordnung s^4 ist. Man hat also, wenn man diesen Wert von $\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}$ in (3) substituiert

$$\sin(\alpha' - 180^\circ) - \sin\alpha = -s\cdot\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tang}\varphi$$
$$- \frac{s^2}{2}\sin\alpha\,(\sin^2\alpha\operatorname{tang}\lambda\operatorname{tang}\varphi + \cos^2\alpha)$$
$$+ \frac{s^3}{6}\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tang}\varphi\,\{1 + 3\sin^2\alpha\,(\operatorname{tang}^2\varphi - 1)\}.$$

Hiermit wieder verfahren wie in Nr. 3 der ersten Abteilung, so ergibt sich:

$$\alpha' - 180^\circ - \alpha = -s\cdot\sin\alpha\operatorname{tang}\varphi$$
$$- \frac{s^2}{2}\sin\alpha\,\{\cos\alpha + \sin\alpha\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\varphi\,(\operatorname{tang}\lambda - \operatorname{tang}\varphi)\}$$
$$+ \frac{s^3}{6}\sin\alpha\operatorname{tang}\varphi\,(1 + 2\sin^2\alpha\operatorname{tang}^2\varphi).$$

In dem Gliede von der Ordnung s^2 muß der Gleichförmigkeit wegen $\operatorname{tang}\lambda$ weggeschafft werden. Man hat nach (4):

$$\operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang}(\varphi + s\cdot\cos\alpha)$$
$$= \operatorname{tang}\varphi + \frac{s\cdot\cos\alpha}{\cos^2\varphi}$$

und also endlich:

$$(6)\quad \alpha' = 180^\circ + \alpha - s\cdot\sin\alpha\operatorname{tang}\varphi - \frac{s^2}{4}\cdot\sin 2\alpha$$
$$- \frac{s^3}{6}\cdot\frac{\sin\alpha\operatorname{tang}\varphi}{\cos^2\varphi}(\sin^2\alpha - \cos 2\alpha\cos^2\varphi).$$

Korrektion der Ausdrücke für Polhöhe, Länge und Azimut wegen der Abplattung der Erde.

3) Die bisherigen Formeln sind in der Voraussetzung gefunden worden, daß die Erde eine Kugel sei, sie bedürfen daher einer Verbesserung wegen der Abplattung.

Die gefundene Differenz der Polhöhe oder $\lambda - \varphi$, ist auf der Kugel der Winkel zwischen den beiden Radien, welche vom Mittelpunkte der in der Rechnung angenommenen Kugel nach den zwei Punkten gezogen werden, welche, in demselben Meridiane, den beiden Polhöhen entsprechen. Diese nämliche Differenz der Polhöhen ist aber auf dem Sphäroide gleich dem Winkel, welchen die beiden Krümmungshalbmesser des Meridians machen. Es folgt also hieraus, daß, wenn der Halbmesser der in der Rechnung angenommenen Kugel r und der Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridians R, der für die Kugelgestalt gefundene Unterschied von $\lambda - \varphi$ mit $\frac{r}{R}$ multipliziert werden müsse.

Für r nehmen wir die Normale in Beziehung auf die Erdachse an. Wenn also b die halbe Erdachse und ε die Abplattung bedeutet, so ist unter der Polhöhe λ:

$$r = b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cos^2 \lambda)$$
$$R = b\,(1 + 2\varepsilon - 3\varepsilon \cos^2 \lambda);$$

s ist im vorhergehenden in Teilen des Halbmessers ausgedrückt, es ist also mit r dividiert. Die Korrektion wegen der Abplattung hat in (4) nur auf das Glied $s \cdot \cos \alpha$ Einfluß, weil die anderen Glieder dadurch von der Ordnung $\varepsilon \cdot s^2$ und $\varepsilon \cdot s^3$ werden würden. Es wird also, weil $s = \frac{S}{r}$, wo S die Distanz in Längenmaß:

$$s \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r}{R} = \frac{S}{b} \cdot \frac{b}{R} \cdot \cos \alpha$$

und folglich:

$$(7) \quad \varphi = \lambda - \frac{S}{b} \cos \alpha\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cos^2 \lambda) - \frac{s^2}{2} \sin^2 \alpha \operatorname{tang} \lambda$$
$$+ \frac{s^3}{6} \cos \alpha \sin^2 \alpha\,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 \lambda).$$

In (17) der ersten Abteilung bedeutet s auch die Distanz durch die halbe Erdachse dividiert; es ist also gegenwärtige Formel mit der in der ersten Abteilung auf ganz anderen Wegen gefundenen vollkommen identisch.

Bei der Formel (5) in Nr. 2, welche die Längendifferenz angibt, findet gar keine Korrektion wegen der Abplattung statt; denn die Länge ist der Winkel, welchen zwei Ebenen machen, die durch die Erdachse gelegt sind, und wovon jede durch einen von den Punkten geht, deren Längendifferenz man bestimmen will. Man sieht nun leicht, daß die Abplattung auf die Neigung dieser Ebenen keinen Einfluß haben kann, und daß also die im sphärischen Netze bestimmte Länge auch für das Sphäroid gilt. Nur folgender Umstand könnte eine Korrektion nötig machen:

In der Formel (5) bedeutet φ die sphärische Polhöhe; im Laufe der Rechnung wird man aber die in (7) korrigierte Polhöhe nehmen, wir wollen den daraus entstehenden Unterschied untersuchen.

Wenn φ' die sphärische Polhöhe, welche in (5) vorausgesetzt wird, bedeutet, so ist nach (7):

$$\varphi' = \varphi - \varepsilon \cdot s \cdot \cos\alpha\,(2 - 3\cos^2\lambda)$$

und also:

$$\frac{1}{\cos\varphi'} = \frac{1}{\cos\varphi}\{1 - \varepsilon \cdot s \cdot \cos\alpha \operatorname{tang}\varphi\,(2 - 3\cos^2\lambda)\}.$$

Substituiert man nun in (5) anstatt $\frac{1}{\cos\varphi'}$ diesen Wert, so wird der Unterschied von der Ordnung $\varepsilon \cdot s^2$, welches unmerklich ist.

Wir wollen nun noch die Korrektion untersuchen, welche die Abplattung im Azimute notwendig macht. Es kommt dabei auf folgendes an: der Horizont auf der Kugel ist eine Ebene, die senkrecht auf dem Halbmesser steht; der des Sphäroids ist eine Ebene, die senkrecht auf der Normalen der sphäroidischen Oberfläche steht; diese zwei Ebenen schneiden sich also in einer Linie, welche senkrecht auf der Tangente des Meridians ist, d. h. in einer Linie, welche von Osten nach Westen geht, und ihre Neigung wird in der Ebene des Meridians gemessen. Nun ist klar, daß das für den Punkt N

S. 45 berechnete Azimut sich auf den Horizont der Kugel bezieht und noch auf den des Sphäroids reduziert werden muß.

Die Neigung des Kugelhorizontes gegen den sphäroidischen ist in N gleich der Korrektion der Polhöhe wegen der Abplattung, folglich nach (7):

$$\varepsilon \cdot s\,(2 - 3\cos^2\lambda)\cos\alpha.$$

Dieses vorausgesetzt, sei in nebenstehender Figur Z das Zenit, HW ein Teil des sphäroidischen und hW ein Teil des Kugelhorizontes, W Westen, so wird, wenn hm das für den Punkt N sphärisch berechnete Azimut ist, HM das verbesserte auf dem Sphäroide sein.

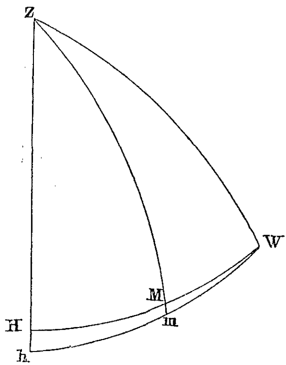

Fig. 9.

In dem Dreiecke ZWH sind alle Seiten und Winkel Quadranten; auch hW ist ein Quadrant, und der Winkel bei h ist ein Rechter, weil W der Pol vom Meridiane ZHh ist; es ist also der Winkel $HZM = HM$, oder gleich dem Azimute auf dem Sphäroide, und man hat in dem rechtwinkligen Dreiecke Zmh, $hm = \alpha' - 180^\circ$, oder gleich dem zu verbessernden Azimute auf der Kugel, $Zh = 90^\circ + \varepsilon \cdot s \cdot \cos\alpha\,(2 - 3\cos^2\lambda)$ und $hZm = \alpha' - 180^\circ + x$; wo also x die Verbesserung des sphärischen Azimutes bedeutet.

Dieses vorausgesetzt, hat man:

$$\cot hZm = \sin Zh \cdot \cot hm$$

oder:

$$\cot(\alpha' - 180^\circ + x) = \cos\{\varepsilon \cdot s \cdot \cos\alpha\,(2 - 3\cos^2\lambda)\}\cot(\alpha' - 180^\circ)$$

oder:

$$\cot(\alpha' - 180^\circ) - \cot(\alpha' - 180^\circ + x) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 s^2 \cos^2\alpha\,(2 - 3\cos^2\lambda)^2 \cot(\alpha' - 180^\circ),$$

und wenn man das Quadrat von x vernachlässigt:

$$x = \frac{1}{4}\varepsilon^2 s^2 \cos^2\alpha\,(2 - 3\cos^2\lambda)^2 \sin 2\,(\alpha' - 180^\circ).$$

Da dieser Wert von x von der Ordnung $\varepsilon^2 s^2$ ist, so ist er durchaus unmerklich.

Eine zweite Korrektion der Formel für das Azimut wegen der Abplattung entsteht auf die nämliche Art wie die in der Länge, nämlich dadurch, daß in (6) die sphärische, wegen der Abplattung noch nicht korrigierte Polhöhe vorausgesetzt wird, in der Rechnung aber der aus (7) erhaltene Wert von φ genommen wird.

Wenn φ' die Polhöhe auf der Kugel, so haben wir, wie oben bei der Korrektion der Länge:

$$\varphi' = \varphi - \varepsilon \cdot s \cdot \cos \alpha \, (2 - 3 \cos^2 \lambda).$$

Diese Änderung von φ kann natürlich nur auf das Glied $s \cdot \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi'$ in (6) Einfluß haben. Man hat aber:

$$\operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang} \varphi - \varepsilon \cdot s \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 - 3 \cos^2 \lambda}{\cos^2 \varphi}$$

und mithin:

$$s \cdot \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi' = s \cdot \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{2} \varepsilon \cdot s^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{2-3 \cos^2 \lambda}{\cos^2 \varphi}.$$

Da diese Korrektion von der Ordnung $\varepsilon \cdot s^2$ ist, so ist sie also auch wieder unmerklich, und in den Formeln (5) und (6), welche die Längendifferenz und das Azimut angeben, findet keine Korrektion wegen der Abplattung statt.

Vergleichung der Ausdrücke für Polhöhe, Länge und Azimut mit denen, welche in der ersten Abteilung durch Betrachtung der kürzesten Linie auf dem Sphäroide erhalten wurden.

4) Die Formel (7), welche die Polhöhe angibt, haben wir schon in der vorhergehenden Nummer mit der ersten Abteilung verglichen und vollkommen gleich gefunden. Um nun auch die Ausdrücke (5) und (6), welche die Länge und das Azimut angeben, mit denen der ersten Abteilung vergleichen zu können, muß man sie auf einerlei Einheit bringen.

In der ersten Abteilung bedeutet s den Bogen dividiert durch die halbe Erdachse; in der zweiten Abteilung bedeutet s den Bogen dividiert durch den Halbmesser der Kugel, welche bei der Berechnung des sphärischen Netzes eingeführt wurde. Dieser Halbmesser der bei der Berechnung des Netzes gebrauchten Kugel ist die Normale des gegebenen Punktes in Beziehung auf die Erdachse; oder wenn wir ihn mit r bezeichnen, so ist nach Nr. 3:

$$r = b\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon\cos^2\lambda).$$

Es muß also s in den Formeln (5) und (6) mit $1 + 2\varepsilon - \varepsilon \cos^2\lambda$ dividiert oder mit $1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\lambda$ multipliziert werden, um diese Formeln mit denen der ersten Abteilung vergleichen zu können, und man wird haben:

$$\alpha' = 180^\circ + \alpha - s\cdot\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\lambda) - \frac{s^2}{4}\sin 2\alpha$$
$$- \frac{s^2}{6}\frac{\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos^2\varphi}(\sin^2\alpha - \cos 2\alpha\cos^2\varphi)$$

$$w = s\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\lambda) - \frac{s^3}{6}\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} + \frac{s^3}{6}\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\varphi}.$$

Anstatt $\cos\lambda$ kann man $\cos\varphi$ setzen, ohne einen Fehler zu begehen, der größer als von der Ordnung $\varepsilon\cdot s^2$ wäre, und dann sind diese Formeln vollkommen mit denen der ersten Abteilung übereinstimmend.

Wir wollen noch die Formeln *Delambre*s (Méthode analytique usw. pag. 83) mit den obigen vergleichen. Diese Formeln heißen in unseren Zeichen, wenn a den Halbmesser des Äquators bedeutet:

$$s' = \frac{S}{a}(1 - \varepsilon\sin^2\lambda)$$

$$\varphi = \lambda - \left(s'\cos\alpha + \frac{s'^2}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\lambda\right)(1 + 2\varepsilon\cos^2\lambda)$$

$$\alpha' = 180^\circ + \alpha - s'\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{s'^2}{2}\sin 2\alpha$$

$$w = s'\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}.$$

Man hat aber $a = b\,(1 + \varepsilon)$, folglich:

$$s' = \frac{S}{b}\cdot\frac{1 - \varepsilon\sin^2\lambda}{1 + \varepsilon} = \frac{S}{b}(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\cos^2\lambda),$$

wo wie immer ε^2 vernachlässigt worden ist. Unser s ist gleich $\frac{S}{b}$, folglich:

$$s' = s\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cos^2 \lambda).$$

Substituiert man diesen Wert von s', so erhält man, wenn man die Größen von der Ordnung εs^2 vernachlässigt:

$$\varphi = \lambda - s \cdot \cos \alpha\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cos^2 \lambda) - \frac{s^2}{2} \sin^2 \alpha \operatorname{tang} \lambda$$

$$\alpha' = 180 + \alpha - s \cdot \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi\,(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cos^2 \lambda) - \frac{s^2}{4} \sin 2\,\alpha$$

$$w = s \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi}(1 - 2\varepsilon + \varepsilon \cos^2 \lambda).$$

Wenn man die Größen von der Ordnung s^3 vernachlässigt, die in der Tat immer sehr unbeträchtlich sind, so werden diese *Delambre*schen Formeln mit den in der ersten Abteilung unter (17), (19) und (20) aufgestellten identisch.

Man sieht also, daß man immer dieselben Resultate erhält, man mag die terrestrischen Distanzen als Linien der kürzesten Entfernung auf dem Sphäroide oder als Kreisbögen betrachten, wobei man nachher die nötige Verbesserung wegen der Abplattung der Erde besonders anbringt. *Euler* und *du Séjour* haben zuerst die erste Methode vorgeschlagen und auseinander gesetzt und nach ihnen mehrere andere. *Le Gendre* und *Delambre* bedienen sich der letzteren Methode, ohne zu zeigen, ob die Resultate, welche sie erhalten haben, mit denen der ersten Methode übereinstimmen oder davon verschieden sind; sie übergehen diese Methode ganz mit Stillschweigen. Aus einer Äußerung *Le Gendre*s (Méthode analytique usw. par Mr. *Delambre* pag. 15) scheint indessen zu folgen, daß er seine Resultate von den bisherigen für verschieden hält. Nachdem er nämlich gezeigt hat, daß die Korrektion des Azimuts wegen der Abplattung, welche wir in Nr. 3 betrachtet haben, unmerklich ist, sagt er: Quelques personnes (soviel ich weiß *Euler* in den Mémoires de l'Académie de Berlin von 1753 und *La Place* im dritten Buche der Mécanique céleste) ont pensé que des observations d'azimut et de latitude, faites dans des lieux assez différens en longitude, et dont on connaîtrait la distance, seraient très-propres à determiner la figure de la terre. Cette opinion n'est nullement fondée, puisqu'on voit que la ligne AB étant perpendiculaire à la méridienne, le coefficient m (unser ε), qui mesure l'applatissement, n'entre que pour une quantité insensible dans l'expression de la latitude, et qu'il influe encore moins sur l'expression de l'azimut du point B.

Aber *Le Gendre* hat vergessen, daß er sein φ, welches unser s ist, gleich gemacht hatte $\frac{y}{r}$, wo y die Distanz und, wie bei uns, $\quad r = b\,(1 + 2m - m\cos^2\lambda)$.

Hätte er diesen Wert von r in die Formel gesetzt, so würde er den nämlichen Ausdruck für das Azimut erhalten haben, auf welchen *Euler* und *La Place* ihre Behauptung mit Recht gründen.

Diese bisherige Verschiedenheit der Ansichten und die Meinung vieler, daß die Resultate wirklich verschieden wären, sind es, die mich bewogen haben, das Problem nach beiden Methoden aufzulösen und ihre Identität zu zeigen.

Besondere Einrichtung der bisher gefundenen Formeln für die Vermessung Bayerns.

5) Wir haben zur Auflösung unseres Problems folgende Ausdrücke gefunden:

$$(4)\quad \varphi = \lambda - \frac{r}{R}\cdot s\cdot\cos\alpha - \frac{1}{2}s^2\cdot\sin^2\alpha\,\mathrm{tang}\,\lambda + \frac{1}{6}s^3\cdot\cos\alpha\sin^2\alpha\,(1+3\,\mathrm{tang}^2\lambda)$$

$$(5)\quad w = s\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} - \frac{1}{6}s^3\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} + \frac{1}{6}s^3\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\varphi}$$

$$(7)\quad \alpha' = 180^\circ + \alpha - s\cdot\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{1}{4}s^2\cdot\sin 2\alpha - \frac{1}{6}s^3\cdot\frac{\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos^2\varphi}(\sin^2\alpha - \cos 2\alpha\cos^2\varphi).$$

Nun wollen wir uns damit beschäftigen, diesen Formeln eine solche Einrichtung zu geben, daß sie für unseren Zweck am bequemsten werden.

s bedeutet hier die Distanz durch den Halbmesser r dividiert; also die Distanz in Teilen des Halbmessers ausgedrückt. In unserem trigonometrischen Netze werden aber die Dreiecke sphärisch berechnet, und mithin sind uns nicht die Bögen, sondern die Sinusse der Bögen unmittelbar gegeben; es wird daher bequemer sein, in den Formeln die Sinusse für die Bögen zu setzen. Bekanntlich ist:

$$s = \sin s + \frac{1}{6} \sin^3 s.$$

Diesen Wert von s in den obigen Formeln substituiert, verwandeln sie sich in folgende:

$$(8) \quad \varphi = \lambda - \frac{r}{R} \sin s \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 s \sin^2 \alpha \operatorname{tang} \lambda$$
$$- \frac{1}{6} \sin s^3 \cos^3 \alpha + \frac{1}{2} \sin^3 s \cos \alpha \sin^2 \alpha \operatorname{tang}^2 \lambda$$

$$(9) \quad w = \sin s \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} + \frac{1}{6} \sin^3 s \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \varphi}$$

$$(10) \quad \alpha' = 180^\circ + \alpha - \sin s \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 s \sin 2\alpha$$
$$- \frac{1}{6} \sin^3 s \sin^3 \alpha \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos^2 \varphi} (1 + 2 \cos^2 \varphi),$$

wo jedes Glied mit $\sin 1''$ zu dividieren ist, um es in Sekunden zu erhalten.

Wenn man $s = 1^\circ$ und λ oder $\varphi = 50^\circ$ macht, so werden in diesen Formeln die Glieder von der Ordnung $\sin^3 s$, indem man α immer so annimmt, wie diese Glieder am größten werden, in (8), 0,27″, in (9) 0,69″, und in (10) 0,96″.

Das Maximum der Glieder von der Ordnung $\sin^3 s$ in diesen Formeln ist also so klein, daß man sie in den meisten Fällen vernachlässigen kann, wie auch *Delambre* immer getan hat. — Noch bequemer zum Gebrauche werden unsere Formeln, wenn man setzt:

$$\sin s \cdot \sin \alpha = m, \quad \sin s \cdot \cos \alpha = n,$$

dann ist:

$$(11)\quad \varphi = \lambda - M \cdot n - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \lambda - \frac{1}{6} \cdot \frac{n^3}{\sin 1''} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 n}{\sin 1''} \operatorname{tang}^2 \lambda$$

$$(12)\quad w = - \frac{m}{\sin 1''} \cdot \sec \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{m^3}{\sin 1''} \sec^3 \varphi$$

$$(13)\quad \alpha' = 180^\circ + \alpha - \frac{m}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{mn}{\sin 1''} - \frac{1}{3} \cdot \frac{m^3}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{m^3}{\sin 1''} \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Den log der Größe M, welche wir der Kürze wegen für $\frac{r}{R \sin 1''}$ gesetzt haben, findet man in der angehängten Hilfstafel I, wo das Argument, größerer Genauigkeit wegen, die mittlere Polhöhe zwischen den zwei Punkten oder ungefähr $\frac{1}{2}(\lambda + \varphi)$ ist. Ferner ist:

$$\log \frac{1}{\sin 1''} = 5{,}3144251.$$

Den Ausdruck für w haben wir negativ gemacht, weil die Längen westlich von *München*, worauf sich die Formel bezieht, negativ angenommen werden. Übrigens versteht es sich von selbst, daß man bei diesen Formeln auf die Zeichen von m und n, die sich nach denen von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ richten, zu sehen hat.

In dem sphärischen Netze werden auch die Abszissen und Ordinaten berechnet; man kann also Polhöhe, Länge und Azimut der Punkte auch aus diesen bestimmen.

Von den Abszissen und Ordinaten sind die Bogen in bayrischen Ruten gegeben, nicht aber deren Sinusse; wir müssen uns daher der Formeln (5), (6) und (7) bedienen. Die Ordinaten stehen senkrecht auf den Abszissen, es ist daher für diesen Fall das Azimut $= 90^\circ$ und also $\sin \alpha = 1$ und $\cos \alpha = 0$; dadurch wird:

$$\varphi = \lambda - \frac{1}{2} s^2 \operatorname{tang} \lambda$$

$$w = - s \cdot \sec \varphi + \frac{1}{6} s^3 \cdot \sec \varphi - \frac{1}{6} s^3 \cdot \sec^3 \varphi$$

$$\alpha' = 270^\circ - s \cdot \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{6} s^3 \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos^2 \varphi} (1 + \cos^2 \varphi).$$

Aber λ ist hier die Polhöhe des Punktes, wo die Ordinate von der Abszisse ausgeht, und s ist die Ordinate in Teilen des Halbmessers ausgedrückt. Nennen wir, der Unterscheidung wegen, diese Polhöhe λ' und die Ordinate O, so ist:

$$\varphi = \lambda' - \frac{1}{2} \frac{O^2}{r^2} \cdot \operatorname{tang} \lambda'.$$

Um λ' zu bestimmen, wollen wir wieder die Polhöhe des gegebenen Ortes λ nennen. Die Distanz der beiden Punkte, deren Polhöhen λ und λ', ist die Abszisse des zu bestimmenden Punktes, die wir mit A bezeichnen wollen. Da diese Distanz im Meridian selbst liegt, so ist für diesen Fall in der Formel (7) $\alpha = 180^\circ$ und also $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$, und man hat:

$$\lambda' = \lambda + \frac{r}{R} \cdot \frac{A}{r}.$$

Diesen Wert von λ' substituiert und alles in Sekunden ausgedrückt, erhält man endlich:

$$\varphi = \lambda + M \cdot \frac{A}{r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{O^2}{r^2 \sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \lambda - \frac{1}{2} \frac{O^2 A}{r^3 \sin 1''} \cdot \sec^2 \lambda$$

$$w = -\frac{O}{r \sin 1''} \cdot \sec \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{O^3}{r^3 \sin 1''} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi}$$

$$\alpha' = 270^\circ - \frac{O}{r \sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{O^3}{r^3 \sin 1''} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos^2 \varphi} (1 + \cos^2 \varphi),$$

oder wenn man setzt: $\frac{A}{r} = a$, $\frac{O}{r} = b$

$$(14) \quad \varphi = \lambda + M \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \lambda - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 a}{\sin 1''} \cdot \sec^2 \lambda$$

$$(15) \quad w = -\frac{b}{\sin 1''} \cdot \sec \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{b^3}{\sin 1''} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi}$$

$$(16) \quad \alpha' = 270^\circ - \frac{b}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{b^3}{\sin 1''} \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos^2 \varphi} (1 + \cos^2 \varphi).$$

Da bei unserer Vermessung die Abszissen und Ordinaten sich alle auf den Punkt *München* beziehen, so ist λ konstant und gleich 48° 8′ 20″. In (15) und (16) kann man im letzten Gliede auch λ für φ setzen, ohne einen Fehler zu begehen, welcher größer als von der Ordnung $b^3 \cdot a$ wäre. Wir können also diesen Formeln folgende Gestalt geben:

(17) $\varphi = 48^\circ\, 8'\, 20'' + M \cdot a - 115100'' \cdot b^2 - 231589'' \cdot b^2 \cdot a$

(18) $w = -206265'' \cdot b \cdot \sec \varphi - 64165'' \cdot b^3$

(19) $\alpha' = 270^\circ - 206265'' \cdot b \cdot \operatorname{tang} \varphi - 124520'' \cdot b^3$.

Die Logarithmen der hier vorkommenden konstanten Zahlen sind:

$$\begin{aligned} \log 206265'' &= 5{,}3144251 \\ \log 115100'' &= 5{,}06108 \\ \log 231589'' &= 5{,}36472 \\ \log 64165'' &= 4{,}80730 \\ \log 124520'' &= 5{,}09524 \end{aligned}$$

α' bedeutet hier den Winkel zwischen dem Meridiane im Süden und dem Ordinatenkreise nach Osten, über Westen und Norden gezählt. Bei Berechnung der Dreiecke rechnen wir die Direktionswinkel vom Westpunkte der Ordinatenkreise; es wird also der Unterschied zwischen Direktionswinkel und Azimut sein

$$90^\circ - 206265'' \cdot b \cdot \operatorname{tang} \varphi - 124520'' \cdot b^3;$$

wenn man also zu dem Direktionswinkel $90^\circ - 206265 \cdot b \cdot \operatorname{tang} \varphi - 124520'' \cdot b^3$ addiert, wird man das Azimut haben.

Beispiele der Rechnung.

Wir wollen hier den Punkt *Peissenberg* aus *München* berechnen, und zwar erstens nach den Formeln (11), (12) und (13) und dann außer der Abszisse und Ordinate, oder nach (17), (18) und (19).

Nach den in der Berechnung des Dreiecksnetzes gebotenen Daten haben wir das Azimut α oder $sMP = 48^\circ\, 18'\, 3{,}029''$ und also:

$\log \sin sMP = 9{,}8731159\,(+)$	$\log \cos sMP = 9{,}8229650\,(+)$
$\log \sin MP = 7{,}9445987$	$\log \sin MP = 7{,}9445987$
$\log m = 7{,}8177146\,(+)$	$\log n = 7{,}7675637\,(+)$

λ ist 48° 8′ 20″, und mittels des Wertes von n sieht man, daß die Polhöhe des *Peissenbergs* ungefähr 47° 48′ ist. Das

Mittel zwischen beiden ist $47^\circ\ 58'$ und mit diesem Argumente findet man in der Tafel I $\log M = 5{,}315\,7042$. Wir haben also nach (11):

$$\begin{array}{rrrl}
48^\circ & 8' & 20'' & = \lambda \\
& -20 & 11{,}34 & = -M \cdot n \\
& & -\ 4{,}97 & = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \lambda \\
& & -\ 0{,}01 & = -\frac{1}{6} \cdot \frac{n^3}{\sin 1''} \\
& & +\ 0{,}03 & = +\frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 n}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang}^2 \lambda \\
\hline
47^\circ & 48' & 3{,}71'' & = \varphi
\end{array}$$

m und n sind positiv, weil das Azimut im ersten Quadranten ist.

Nun haben wir ferner nach (12):

$$\begin{array}{rrl}
-\ 33' & 38{,}18'' & = -\frac{m}{\sin 1''} \cdot \sec \varphi \\
& -\ 0{,}03 & = -\frac{1}{6} \cdot \frac{m^3}{\sin 1''} \cdot \sec^3 \varphi \\
\hline
-\ 33' & 38{,}21'' & = w
\end{array}$$

Die Länge ist negativ und also westlich von *München*.

Ferner nach (13):

$$\begin{array}{rrrl}
228^\circ & 18' & 3{,}03'' & = sMP + 180^\circ \\
& -24 & 55{,}10 & = -\frac{m}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \varphi \\
& & -\ 3{,}97 & = -\frac{1}{2} \cdot \frac{mn}{\sin 1''} \\
& & -\ 0{,}02 & = -\frac{1}{3} \cdot \frac{m^3}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tang} \varphi \\
& & -\ 0{,}02 & = -\frac{1}{6} \cdot \frac{m^3}{\sin 1''} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos^2 \varphi} \\
\hline
227^\circ & 53' & 3{,}92'' & = sPM.
\end{array}$$

Die Bezeichnung der Azimute ist hier ganz analog mit der Bezeichnung des Direktionswinkel eingerichtet, so daß z. B. sPM den Winkel in *Peissenberg* zwischen Süden und *München*, immer von der Linken zur Rechten gezählt, bedeutet.

Um Polhöhe, Länge und Azimut des nämlichen Punktes aus seiner Abszisse und Ordinate zu berechnen [mittels der Formeln (17), (18) und (19)], hat man:

$$\begin{array}{ll} \log A = 4{,}1077786 & \log O = 4{,}1579211 \\ \log r \;= 6{,}3402033 & \log r \;= 6{,}3402033 \\ \hline \log a \;= 7{,}7675753\,(-) & \log b \;= 7{,}8171778\,(+) \end{array}$$

wo a negativ, weil die Abszisse A negativ ist; nun ist nach (17):

$$\begin{array}{rrrl} 48^\circ & 8' & 20'' & = \lambda \\ & -20 & 11{,}38 & = M \cdot a \\ & & -\;4{,}97 & = -\,115100'' \cdot b^2 \\ & & +\;0{,}06 & = -\,231589'' \cdot b^2 a \\ \hline 47^\circ & 48' & 3{,}71'' & = \varphi \end{array}$$

nach (18) ist:

$$\begin{array}{rrl} -\,33' & 38{,}19'' & = -\,206265'' \cdot b \cdot \sec \varphi \\ & -\;0{,}02 & = -\;\;64165'' \cdot b^3 \\ \hline -\,33' & 38{,}21'' & = w \end{array}$$

und nach (19):

$$\begin{array}{rrrl} 228^\circ & 17' & 59{,}06'' & (\text{Direktionswinkel } wPM + 90^\circ) \\ & -24 & 55{,}11 & = -\,206265''\, b \tang \varphi \\ & & -\;0{,}03 & = -\,124520''\, b^3 \\ \hline 227^\circ & 53' & 3{,}92'' & = sPM. \end{array}$$

Unsere zwei Methoden geben also ganz einerlei Resultate, und die zweite ist eine vortreffliche Kontrolle für die erste. Wenn man nämlich mittels der ersten Methode mehrere Punkte voneinander abhängig berechnet hat, so kann man mit Abszissen und Ordinaten, die von allen Punkten gegeben sind, jeden beliebigen dieser Punkte unabhängig von den übrigen berechnen und die Resultate vergleichen.

6) In mancher Hinsicht ist es interessant, Polhöhe und Länge der Eckpunkte der Tischblätter zu kennen. Für diesen Fall lassen sich die Formeln (17) und (18) zum Gebrauche noch bequemer machen, wenn man sie auf die Schicht und Nummer des Blattes bezieht. Es sei die Zahl der Schicht m und die Nummer des Blattes n, so ist, weil die Seiten der Blätter gleich 800 Ruten sind, in (17) und (18):

$$a = \frac{800}{r} \cdot m,\; b = \frac{800}{r} \cdot n,$$

und dadurch gehen diese Formeln in folgende über:

$$\varphi = 48^\circ\ 8'\ 20'' + N \cdot m - 0{,}015376'' \cdot n^2 - 0{,}00001131 \cdot n^2 m$$

$$w = -75{,}3896'' \cdot n \cdot \sec\varphi - 0{,}00000313 \cdot n^3$$

Den Wert von $N = \left(\frac{800}{R \cdot \sin 1''}\right)$ findet man mit dem Argumente der mittleren Polhöhe oder ungefähr $\frac{1}{2}(48^\circ\ 8' + \varphi)$, in der Hilfstafel II, und der konstante Logarithmus von 75,3896″ ist 1,8773118.

Beispiel.

Man will die Polhöhe und Länge des äußeren Eckpunktes des Blattes *N. W. X.* 10 berechnen.

Hier ist $m = 10$ und $n = 10$. Mittels des Wertes von $N = 75{,}6''$ findet man ungefähr mittlere Polhöhe 48° 15′ und damit genau $N = 75{,}608''$ und ferner:

$$\begin{array}{rrrl}
48^\circ & 8' & 20'' & \\
& +12 & 36{,}08 & = N \cdot m \\
& - & 1{,}54 & = -0{,}01537 \cdot n^2 \\
& - & 0{,}01 & = -0{,}0000113 \cdot n^2 m \\
\hline
48^\circ & 20' & 54{,}53'' & = \varphi
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
-18' & 54{,}37'' & = -75{,}3896'' \cdot n \cdot \sec\varphi \\
- & 0{,}00 & = -\ 0{,}0000031 \cdot n^3 \\
\hline
-18' & 54{,}37'' & = w.
\end{array}$$

Es ist noch zu erinnern, daß sich das Vorzeichen von m nach dem der Abszisse und das von n nach dem der Ordinate richtet.

Anmerkungen.

Johann Georg Soldner wurde am 16. Juli 1776 auf dem Georgenhofe bei Feuchtwangen geboren. Als Sohn eines Halbbauern (*Johann Andreas*) konnte er nur eine dürftige Dorfschule besuchen. Angeregt durch Erzählungen über Feldmeßarbeiten, beschäftigte er sich ohne alle Hilfsmittel mit geometrischen Aufgaben. Hierdurch erregte er im achtzehnten Lebensjahre die Aufmerksamkeit des Physikers *Julius Konrad Yelin*, der es ihm erwirkte, Kenntnisse — auch sprachliche — privatim am Ansbacher Gymnasium zu erwerben. Wirklicher Gymnasialschüler war *Soldner* nicht. Ende des 18. Jahrh. erscheint *Soldner* in Berlin als Schüler des Astronomen *Bode*. Welche bedeutende Kenntnisse *Soldner* in wenigen Jahren sich erwarb, beweist sein in *Zach*s »Monatliche Korrespondenz« 9. Band 1804 mitgeteilter Aufsatz: »Vorschlag zu einer Gradmessung in Afrika«. Anläßlich des großen Einflusses der Abplattung der Erde auf die Bestimmung des Mondortes und der Unregelmäßigkeit der Erdfigur rät *Soldner*, statt der aus allen Gradmessungen erhaltenen Abplattung — unter Voraussetzung, daß sie Meridianlinien sind, die von Ellipsen nicht sehr abweichen — für die Beobachtungen einer Sternwarte, die Abplattung des zugehörigen Meridianes zu benutzen; mindestens möge man sich einer Abplattung bedienen, die aus der Gradmessung eines Meridianes am Äquator erhalten wurde, der durch Europa geht. *Soldner* erklärt:

»Der schicklichste Ort dazu wäre unstreitig die Küste von Kongo oder die Sklavenküste, da wo der Äquator die westliche Küste von Afrika schneidet. Diese Gegend liegt sozusagen unter dem Meridian von Europa, und man könnte, ohne Gefahr eines merklichen Irrtums, alle in Europa gemessenen Grade mit diesem vergleichen, um die oben vorgeschlagenen besonderen Abplattungen (Applatissemens particuliers) zu bestimmen *).

*) Selbst gegenwärtig, wo ein reiches Material von Gradmessungen und zahlreichen Untersuchungen über die Größe der Lot-

Auch die Pendellängen könnten dazu dienen, die besonderen Abplattungen zu bestimmen; aber mit wenig Sicherheit. Eine lokale Verschiedenheit der Dichte der Erde kann, unabhängig von der Figur, eine große Veränderung in der Pendellänge hervorbringen.«

Arbeiten in den astronomischen Jahrbüchern verschafften *Soldner* Freunde und Gönner; König Friedrich Wilhelm III. von Preußen bewilligte ihm eine jährliche Unterstützung und übertrug ihm 1805 die Triangulierung des Fürstentums Ansbach, für die auch eine topographische Aufnahme geplant war, welch letztere Arbeit aber durch den Verlust von Ansbach nach den Schlachten von Jena und Auerstädt nicht zur Ausführung kam.

In Bayern hatte der Kurfürst Maximilian Joseph bereits 1801 ein topographisches Bureau errichtet, das von einer »Steuervermessungskommission« besorgt wurde; dieses wurde mit einer zweiten Behörde »Steuerrektifikationskommission« 1804 zu einer Behörde »Unmittelbare Königliche Steuerkatasterkommission« vereinigt, dessen Vorstand Joseph v. Utzschneider für die topographischen Arbeiten *Ulrich Schiegg* und 1808 *Soldner* berief.

Soldner legte bereits am 5. Mai 1810 seiner vorgesetzten Behörde die hier zum Abdruck gelangte Abhandlung vor, die aber leider als Dienstgeheimnis behandelt wurde. Erst 1873 wurde diese wichtige Arbeit über Bemühungen des Professors Dr. *Karl Max von Bauernfeind* in dem Werke: »Die Bayerische Landesvermessung«, herausgegeben von der Königlichen Steuerkatasterkommission und dem Königlichen topographischen

---

abweichungen vorliegt, scheint nach *F. R. Helmert* (»Die Größe der Erde«. Sitzungsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1906) noch immer keine Veranlassung geboten, von dem *Bessel*schen Werte der Abplattung 1 : 299,15, der aus jenem durch die Messungen der Schwerkraft (1 : 298,3, mittleren Fehler des Nenners ± 1.1) bestätigt wird, abzugehen. Größere Unterschiede ergeben die Gradmessungsdaten verschiedener Gegenden für die Äquatorialhalbachse. Der *Bessel*sche Wert kann rund um 1 : 10000 vergrößert werden. *Helmert* hat die Resultate der Vermessung der Vereinigten Staaten von Amerika in dem Aufsatze: »Über die Genauigkeit der Dimensionen des *Hayford*schen Erdellipsoids (Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften 1911), einer Kritik unterzogen. Als Resultat wird erhalten: Nenner der Abplattung 297,0 ± 1,2, halbe große Achse 6378388 m ± 53 m, also fast 1 km größer als der *Bessel*sche Wert.

Bureau abgedruckt*). In dieser Denkschrift liefert *Soldner* eine kurzgefaßte, für den damaligen ja selbst noch viel späteren Stand der Präzisionsinstrumente ausreichende höhere Geodäsie. Der hohe Wert der Abhandlung *Soldners* kann aus den Briefen von *Gauß* an Olbers, Göttingen 13. Januar 1821, 9. Oktober 1825, 14. Januar 1827, 1. März 1827 erkannt werden. Wenn *Gauß* im ersten (13. Januar 1821) erklärt: »Ich habe mir schon seit Jahren eine eigene Methode entworfen, wie solche Messungen (Dreiecke 1. Ordnung) am zweckmäßigsten behandelt werden können; denn alles, was ich darüber gelesen habe, finde ich herzlich wertlos«, so hätte er gewiß nicht letzteren Ausspruch getan, wenn ihm *Soldners* Abhandlung vorgelegen wäre. Aber auch nach der Veröffentlichung 1873 scheint von *Soldners* Abhandlung außer der Berechnung sphärischer rechtwinkliger Koordinaten aus den Seiten und Richtungswinkeln nichts in geodätische Lehrbücher gedrungen zu sein. Wie wenig Verständnis aber dem Wesen der *Soldner*schen Koordinaten entgegengebracht wurde, geht daraus hervor, daß man aus ihnen eine »*Cassini-Soldner*sche« Abbildung formte, die man sogar als »*Soldner*sche kongruente« — widersinnig jeder Abbildungsart — bezeichnete**).

Indem *Soldner* das auf der Berührungskugel des Sphäroids liegende Aufnahmegebiet in Teile zerlegte, die praktisch als eben bezeichnet werden können, die Aufnahmeblätter der Katastervermessung mit den (durch rechtwinklige sphärische Koordinaten bestimmten) Fixpunkten dotierte, so kann er mit Recht als der Erfinder der Polyederprojektion bezeichnet werden***).

*) Gegenwärtig ist dieses Werk im Buchhandel nicht mehr zu haben und ist nicht einmal in einer der drei großen öffentlichen Bibliotheken Wiens vorhanden. Auch nicht in der Königlichen Bibliothek Berlin und in den Universitäts Bibliotheken Göttingen, Leipzig.

**) Diese bequemen Näherungsformeln der Lösung einer Aufgabe der sphärischen Trigonometrie dürfen nicht mit der Abbildung des Sphäroids auf die Ebene durch die *Gauß*sche Projektion der Hannoverschen Landesvermessung und mit der *Schreiber*schen Doppelprojektion verglichen werden. Bei den letzteren dient die Projektion des Sphäroids auf die Ebene dazu, die Rechnung statt für ein Gebiet auf dem Sphäroid für ein solches in einer Ebene ausführen zu können. Von einer derartigen Absicht findet man bei *Soldner* keine Spur.

***) Von der späteren »preußischen« Polyederprojektion der Aufnahmeblätter unterscheidet sich die *Soldner*sche nur durch die Koordinaten, nach denen die Fixpunkte eingetragen werden. In

Bedeutend war aber die Anregung, die durch die Landesaufnahme von Bayern an die Nachbarstaaten ausging. Württemberg, Baden, Hessen wurden fast genau nach *Soldners* Muster aufgenommen. Ihm und seinen hervorragenden Nachfolgern ist der hohe Stand des Vermessungswesens in Bayern zu danken.

Die wenigen Stellen, wo allgemein Bekanntes des Zusammenhanges wegen mitgeteilt wird, abgerechnet, geht *Soldner* seine eigenen Wege. Originalität, Gründlichkeit und überaus klare Darstellung zeichnen die vorliegende Abhandlung aus. Der Abdruck in dem Werke: »Die Bayrische Landesvermessung,« ist sehr korrekt.

Von den weiteren Schicksalen *Soldners* möge noch mitgeteilt werden: 1815 wurde *Soldner* zum Hofastronomen und Vorstande der neu zu erbauenden Sternwarte ernannt, wo er eine rege Tätigkeit in praktischer Astronomie entwickelte. Am 13. Mai 1833 starb *Soldner*. An der Westseite der Kirche von Bogenhausen erinnert eine Gedenktafel aus Stein an den zu früh der Wissenschaft entrissenen Forscher*).

Spezielle Noten zum Text.

Zu S. 4. Diese auf S. 279 und 280 des Werkes: »Die Bayrische Landesvermessung,« mitgeteilte Tafel ist gegenwärtig durch die Angabe der Zahlen S und T in den Logarithmen-

---

Preußen sind die Fixpunkte durch die geographischen Koordinaten bestimmt, *Soldner* gibt sie durch die zugehörigen transversalen Größen. In Bayern wurde die *Soldner*sche Polyederprojektion nur der Katastervermessung zugrunde gelegt. Eine rationelle Kartenaufnahme sollte wohl auf der Katasteraufnahme beruhen, deren Blätter auf den Maßstab der Kartenaufnahme reduziert nur mehr durch die Bodenformen und Höhenlinien ergänzt werden. In dieser Art wird die neue Kartenaufnahme 1 : 10000 in Frankreich geplant. Die ungeheuere Arbeit einer richtigen Katasteraufnahme in hinreichend großem Maßstabe — in Frankreich sind 1150000 Blätter erforderlich — verbunden mit dem regen Bedürfnis einer guten Karte, das sich am Beginn des 19. Jahrhunderts geltend machte, verhinderte es, gleich beim Aufschwunge der Kartographie diesen Weg einzuschlagen — abgesehen von dem geringeren Werte des Bodens vor 100 Jahren.

*) Die hier mitgeteilten biographischen Daten sind dem Vortrage von *Karl Max v. Bauernfeind* entlehnt, gehalten bei der Jahresschlußfeier der Königl. Technischen Hochschule zu München, am 27. Juli 1885. Das selbst an der erwähnten Gedenktafel unrichtig angegebene Geburtsdatum (15. Juni 1776, statt 15. Juli) wurde in dem Vortrage berichtigt. Eine Aufzählung der von *Soldner* verfaßten Abhandlungen enthält das »Verzeichnis der an der Königl. Sternwarte zu München in den ersten 50 Jahren ihres Bestehens (1820—1869) erschienenen Publikationen« von Professor *Lamont*.

tafeln überflüssig geworden. Bezüglich der Unbequemlichkeit im Rechnen durch das Nichtvorhandensein dieser Zahlen in den älteren Logarithmentafeln siehe Ostwalds Klassiker Nr. 177, S. 33.

Zu S. 6—8. Sind a und b die Halbachsen einer Ellipse, e deren Exzentrizität, so ist

$$r = \frac{a}{(1 - e^2 \sin \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin \lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tan \lambda = \frac{a^2}{b^2} \tan \lambda', \; c = CN = e^2 r \sin \lambda;$$

$$\varrho^2 = r^2 + c^2 - 2 r c \sin \lambda$$
$$\varrho^2 = r^2 (1 - 2 e^2 \sin \lambda^2 + e^4 \sin \lambda^2).$$

Soldner erklärt als Abplattung ε

$$\varepsilon = \frac{a - b}{b} = \frac{m - n}{n}, \quad \text{wo } a : b = m : n.$$

Der Ausdruck für R kann so umgestaltet werden. Setzt man

$$2 \sin \lambda^2 = 1 - \cos 2 \lambda,$$

so wird

$$R = \frac{m^2 n \sqrt{8}\, b}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cos 2 \lambda\right)^{-\frac{3}{2}},$$

dabei ist $m^2 - n^2 : m^2 + n^2$ nahe $= \varepsilon$.

Entwickelt man $\left(1 + \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cos 2 \lambda\right)^{-\frac{3}{2}}$ in eine Reihe, so erhält man

$$1 - \frac{3}{2} \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \cos 2 \lambda + \frac{15}{16} \left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right)^2 (1 + \cos 4 \lambda) + \cdots$$

Wird R mit $d\lambda$ multipliziert und von 0 bis λ integriert, so erhält man die Reihe für AM. Für $\lambda = \frac{\pi}{2}$, wird $AM = Q$.

Sind M und M' zwei Punkte des Meridians, $\lambda - \frac{1^\circ}{2}$ die Breite von M, $\lambda + \frac{1^\circ}{2}$ die Breite von M', so ist

$$g = AM' - AM.$$
$$l = r \cos \lambda \frac{\pi}{180}.$$

Wird r in eine Potenzreihe nach $\frac{m^2 - n^2}{n^2} \cos\lambda^2$ entwickelt, so erhält man den Ausdruck von l.

Zu S. 9. Die Kugel, welche *Soldner* seiner Berechnung zugrunde legt, berührt das Sphäroid in dem Parallelkreis der Breite λ. Die Punkte des Sphäroids werden aus dem Mittelpunkte N (gehörig zur Breite λ) zentral auf die Kugelfläche projiziert. Näheres über diese Projektion enthält das Heft Ostwalds Klassiker Nr. 177, S. 103. Ist φ die sphäroidische Breite, φ' die sphärische, so ist mit Fehler vierter Ordnung (nach e und $\varphi - \lambda$)

$$\varphi - \varphi' = e^2 \cos\lambda^2 (\varphi - \lambda) = e^2 \cos\lambda^2 (\varphi' - \lambda),$$

$$\varphi - \lambda = (1 + e^2 \cos\lambda^2)(\varphi' - \lambda) = \frac{r}{R}(\varphi' - \lambda).$$

Für λ wird bei *Soldner* (konstant) die Polhöhe des nördlichen Turmes der Frauenkirche München gewählt.

Zu S. 18. $A'' = \tan A'' - \frac{1}{3}\tan A''^3,$

$$\tan A'' = \frac{\sin\alpha \sin d}{\cos O \cos d - \sin O \cos\alpha \sin d}$$

$$= \frac{\sin\alpha\, d\left(1 - \frac{1}{6}d^2\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}O^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}d^2\right) - d\,O\cos\alpha}$$

$$= \sin\alpha\, d\left(1 + \frac{1}{3}d^2 + \frac{1}{2}O^2 + d\,O\cos\alpha\right)$$

mit Fehler vierter Ordnung; also

$$A'' = d\sin\alpha + \frac{1}{2}O^2 d\sin\alpha + \frac{1}{2}d^2 O\sin 2\alpha$$
$$+ \frac{1}{3}d^3 \sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Im Originale fehlt beim Gliede mit d^3 der Faktor $\cos\alpha^2$. Diese Formel wird aber nicht weiter verwendet.

Setzt man $\alpha' = 180^\circ + \alpha + u$, so ist

$$\cot(\alpha + u) = \cot\alpha - \frac{u}{\sin\alpha^2} = \cot\alpha\left(1 - \frac{1}{2}d^2\right) - \frac{d\,O}{\sin\alpha}$$

mit Fehler vierter Ordnung. Daraus folgt

$$u = \frac{1}{4} d^2 \sin 2\alpha + d\, O \sin \alpha.$$

Zu S. 29. Einfacher erhält man die Gleichungen (7), (8), (9), die für jede Rotationsfläche gelten, wenn man φ als unabhängige Veränderliche (also w als Funktion von φ) voraussetzt. Setzt man

$$d\,w = q\, d\,\varphi, \quad \sqrt{R^2 + \varrho^2 q^2} = v, \quad d\,S = v\, d\,\varphi,$$

so muß $\int v\, d\,\varphi$ zwischen den gegebenen Grenzen ein Minimum werden. Dies gibt

$$\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\partial\, v}{\partial\, q}\right) = \frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{\varrho^2 q}{v}\right) = 0,$$

also
$$\frac{\varrho^2 q}{v} = c = \text{konstans} = \varrho \cdot \frac{\varrho\, d\,w}{d\,S} = \varrho \sin \eta.$$

Aus $\varrho^2 q = v\, c$, folgt

$$q = \pm \frac{c\, R}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - c^2}}, \quad v = \pm \frac{R\, \varrho}{\sqrt{\varrho^2 - c^2}}; \quad c = \varrho' \sin \alpha.$$

Zu S. 32. Z. 8 lautet im Original: »Wir wollen wieder zu den Formeln (5) und (6) zurückkehren.« Dieser komplizierte Vorgang, um zu den Formeln (8) und (9) zu gelangen, ist nicht nötig.

Zu S. 33. Zur Erläuterung dieser weggelassenen Substitution möge mitgeteilt werden*). Es ist

$$\frac{\varrho' R}{\varrho} = \frac{b \cos \lambda}{\cos \varphi} (1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon \cos \varphi^2 - \varepsilon \cos \lambda^2),$$

$$\varrho\, R = b^2 (1 + 4\varepsilon - 4\varepsilon \cos \varphi^2) \cos \varphi,$$

$$\frac{\varrho^2 - \varrho'^2 \sin \alpha^2}{b^2} = \cos \varphi^2 - \cos \lambda^2 \sin \alpha^2$$

$$+ 2\varepsilon\, 2\big((\cos \varphi^2 - \cos \lambda^2 \sin \alpha^2) - (\cos \varphi^4 - \cos \lambda^4 \sin \alpha^2)\big).$$

Zur Bedeutung der Hilfsgrößen $\varkappa$, μ, ψ. Konstruiert man ein sphärisches Dreieck $P\,M\,N$**) mit den Seiten $P\,M = 90^\circ - \lambda$,

*) In diesem Teile wird wiederholt angewendet: Sind x, y kleine Größen, so ist $(1+x)\,(1+y) = 1+x+y$, $1+x:1+y = 1+x-y$, usw.

**) Für die sphärischen Dreiecke werden für die Seiten und Winkel dieselben Buchstaben gewählt, wie auf dem Sphäroid.

$PN = 90^0 - \varphi$, Winkel $PMN = 180^0 - \alpha$ und zieht den Bogen PT senkrecht auf MN, so ist wegen

$$\cos z = \sin\alpha\cos\lambda,\quad \sin\lambda = \sin z\cos\mu,\quad \sin\varphi = \sin z\cos\psi,$$
$$PT = 90^0 - z,\quad TM = \mu,\quad TN = \psi.$$

Damit erhält man

$$\cos\varphi\, d\varphi = -\sin\psi\sin z\, d\psi,$$
$$\cos\varphi^2 - \cos\lambda^2\sin\alpha^2 = \sin z^2\sin\psi^2,$$

$$\frac{\sqrt{\varrho^2 - \varrho'^2\sin\alpha^2}}{b} =$$

$$\sin z\sin\psi\left(1 + 2\,\varepsilon - \varepsilon\,\frac{\cos\varphi^4 - \cos\lambda^4\sin\alpha^2}{\sin z^2\sin\psi^2}\right).$$

$$d\omega = \frac{-\cos\lambda\sin\alpha}{\sin z\sin\psi}\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\,Z = -\frac{\cos z\cos\varphi\, d\varphi}{\sin z\sin\psi\cos\varphi^2}\,Z,$$

$$Z = 1 - 2\,\varepsilon\cos\varphi^2 - \varepsilon\cos\lambda^2 + \varepsilon\,\frac{\cos\varphi^4 - \cos\lambda^4\sin\alpha^2}{\cos\varphi^2 - \cos\lambda^2\sin\alpha^2}.$$

Wird

$$-2\,\varepsilon\cos\varphi^2 - \varepsilon\cos\lambda^2 = -\varepsilon\cos\varphi^2 - \varepsilon(\cos\varphi^2 + \cos\lambda^2)$$

gesetzt und $\cos\varphi^2 + \cos\lambda^2$ auf den Nenner $\cos\varphi^2 - \cos\lambda^2\sin\alpha^2$ gebracht, so wird

$$Z = 1 - \varepsilon\cos\varphi^2 - \varepsilon\,\frac{\cos\lambda^2\cos\alpha^2\cos\varphi^2}{\sin z^2\sin\psi^2}.$$

$$\frac{dS}{b} = -\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin z\sin\psi}\left(1 + 2\,\varepsilon - 4\,\varepsilon\cos\varphi^2\right.$$
$$\left. + \varepsilon\,\frac{\cos\varphi^4 - \cos\lambda^4\sin\alpha^2}{\cos\varphi^2 - \cos\lambda^2\sin\alpha^2}\right),$$

$$-\cos\varphi^2 + \frac{\cos\varphi^4 - \cos\lambda^4\sin\alpha^2}{\cos\varphi^2 - \cos\lambda^2\sin\alpha^2}$$
$$= \frac{\cos\lambda^2\sin\alpha^2(\cos\varphi^2 - \cos\lambda^2)}{\sin z^2\sin\psi^2}.$$

$$\frac{dS}{b} = d\psi\left(1 - \varepsilon + 3\,\varepsilon\sin z^2\cos\psi^2\right.$$
$$\left. + \varepsilon\,\frac{\cos\lambda^2\sin\alpha^2(\sin\lambda^2 - \cos\psi^2\sin z^2)}{\sin z^2\sin\psi^2}\right).$$

Setzt man

$$-\varepsilon\cos\lambda^2\sin\alpha^2\cot\psi^2 = \varepsilon\cos\lambda^2(\cos\alpha^2-1)\cot\psi^2$$
$$-\varepsilon\cos\lambda^2\cot\psi^2 = \varepsilon\cos\lambda^2 - \frac{\varepsilon\cos\lambda^2}{\sin\psi^2},$$

so erhält man den *Soldner*schen Ausdruck von $dS:b$.

Zu S. 34. Statt durch Umkehrung erhält man die Gleichung (14) auf folgende Art. Für die Voraussetzungen *Soldners* erhält man

$$\sin 2\psi - \sin 2\mu = 2s\cos 2\mu = 2s(2\cos\mu^2-1)$$
$$\sin\varkappa^2(\sin 2\psi - \sin 2\mu) = 4s\cos\mu^2\sin\varkappa^2 - 2s\sin\varkappa^2$$
$$= 4s\sin\lambda^2 - 2s\sin\varkappa^2,$$

Aus $\cot\varkappa = \sin\mu\tan\alpha$ folgt

$$\frac{\cot\varkappa\cos\alpha}{\sin\mu} = \sin\alpha,\quad \frac{\cot\varkappa\cos\alpha\cos\lambda}{\sin\mu} = \sin\alpha\cos\lambda = \cos\varkappa,$$

also

$$s = \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\sin\varkappa^2\right)(\psi-\mu)$$
$$+\varepsilon s\left(3\sin\lambda^2 - \frac{3}{2}\sin\varkappa^2 - \cos\varkappa^2\right)$$
$$= \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\sin\varkappa^2\right)(\psi-\mu)$$
$$+\varepsilon s\left(2 - 3\cos\lambda^2 - \frac{1}{2}\sin\varkappa^2\right),$$

$$s\left(1-\varepsilon\left(2-3\cos\lambda^2-\frac{1}{2}\sin\varkappa^2\right)\right) = \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\sin\varkappa^2\right)(\psi-\mu)$$

$$s(1-2\varepsilon+3\varepsilon\cos\lambda^2) = \psi-\mu.$$

Zu S. 35. Der Ausdruck »ganz genau« in 3) ist in dem Sinne zu verstehen, daß alle Glieder frei von der ersten Potenz der Abplattung berücksichtigt sind.

Im folgenden wird s als kleine Größe erster Ordnung, ε zweiter vorausgesetzt. Die Größen vierter Ordnung werden vernachlässigt. Übereinstimmend mit *Delambre.*

Zu S. 36. Die Formel (17) kann man auch so erhalten: Man setze $\varphi = \lambda - x$, so erhält man

$$x + \frac{1}{2} \tan \lambda \, x^2 - \frac{1}{6} x^3 = s \, (1 - 2 \, \varepsilon + 3 \, \varepsilon \cos \lambda^2) \cos \alpha$$
$$+ \frac{1}{2} s^2 \tan \lambda - \frac{1}{6} s^3 \cos \alpha,$$

aus welcher Gleichung durch Umkehrung x bestimmt wird. Man setze $$x = A \, s + B \, s^2 + C \, s^3,$$
so folgt unmittelbar
$$A = (1 - 2 \, \varepsilon + 3 \, \varepsilon \cos \lambda^2) \cos \alpha,$$
in x^3 kann $x = s \cos \alpha$ gesetzt werden, $x^2 = A^2 \, s^2 + 2 \, A \, B \, s^3$; damit erhält man
$$B = \frac{1}{2} \sin \alpha^2 \tan \lambda, \quad C = - \frac{1}{6} \cos \alpha \sin \alpha^2 \, (1 + 3 \tan \lambda^2).$$

Um x durch φ auszudrücken, genügt es, in den Gliedern mit s und s^3 die Größe λ durch φ zu ersetzen, für
$$\tan \lambda = \tan \varphi + \frac{s \cos \alpha}{\cos \varphi^2}$$
zu setzen. Damit wird
$$x = s \cos \alpha \, (1 - 2 \, \varepsilon + 3 \, \varepsilon \cos \varphi^2) + \frac{1}{2} s^2 \sin \alpha^2 \tan \varphi$$
$$+ \frac{s^3}{3} \cos \alpha \sin \alpha^2.$$

Ganz analog wie Formel (17) erhält man die Formel (20).

Die Gleichungen (17), (19), (20) enthalten eine Näherungslösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie. Diese Reihen für die geographischen Koordinaten können, statt des umständlichen Umweges der Integration, Umkehrung und Umformung, einfacher durch direkte Entwicklung der höheren Differentialquotienten mittels der Formeln (8) und (9) erhalten — und dabei überdies erweitert werden*).

Setzt man
$$c = \varrho \sin \eta \,, \quad \varrho = N \cos \varphi \,,$$
und zählt die Längen nach Westen wachsend, so ist
$$\frac{d \varphi}{dS} = - \frac{\cos \eta}{R}, \quad \frac{d w}{dS} = + \frac{\sin \eta}{N \cos \varphi}.$$

*) Eine Erweiterung bis einschließlich der Glieder mit s^5 (mit vereinfachten Koeffizienten) liefert der § 83 »Die Bayrische Landesvermessung«. Der fünfte Differentialquotient der Breite ist zu verbessern.

Durch Differentiation von $c = \varrho \sin \eta$ erhält man (mit Zuziehung des Wertes $d\varphi : dS$)

$$\frac{d\eta}{dS} = -\frac{\sin \eta \tan \varphi}{N}.$$

Durch wiederholte Differentiation erhält man mit Berücksichtigung, daß

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{R} = -\frac{3e^2 \sin 2\varphi}{2(1-e^2)N}, \quad \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{N} = -\frac{e^2 N}{2a^2}\sin 2\varphi,$$

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{N\cos\varphi} = \frac{R\sin\varphi}{(N\cos\varphi)^2}, \quad \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{NR} = -\frac{2e^2\sin 2\varphi}{(1-e^2)N^2},$$

wenn der Buchstabe η durch α ersetzt wird,

$$\frac{d^2\varphi}{dS^2} = -\frac{\tan\varphi}{NR}\left(\sin\alpha^2 + \frac{3e^2}{1-e^2}\cos\varphi^2\cos\alpha^2\right)$$

$$(1-e^2)\frac{N^2R}{\cos\alpha}\frac{d^3\varphi}{dS^3} = \sin\alpha^2(1+3\tan\varphi^2)$$

$$-e^2\left\{\sin\alpha^2(10\sin\varphi^2 + 3\tan\varphi^2)\right.$$

$$\left.-3\cos\alpha^2\left(\frac{N}{R}\cos 2\varphi - \frac{e^2}{1-e^2}\sin 2\varphi^2\right)\right\},$$

$$\frac{d^2w}{dS^2} = -\frac{\sin 2\alpha \sin\varphi}{(N\cos\varphi)^2}$$

$$\frac{d^3w}{dS^3} = \frac{2\sin\alpha}{(N\cos\varphi)^3}\left\{(3\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2)\sin\varphi^2 + \left(\frac{N}{R}\right)\cos\alpha^2\cos\varphi^2\right\},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dS^2} = \frac{\sin 2\alpha}{2(1-e^2)N^2}\left(1 + 2\tan\varphi^2 - e^2(\sin\varphi^2 + 2\tan\varphi^2)\right)$$

$$\frac{d^3\alpha}{dS^3} = -\frac{\sin\alpha\cos 2\alpha\tan\varphi}{N^3}\left(\frac{N}{R} + 2\tan\varphi^2\right)$$

$$-\frac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{N^3}\cdot\frac{N}{R}\left\{\frac{2\tan\varphi}{\cos\varphi^2} - e^2\sin 2\varphi\left(\frac{1}{1-e^2} + \left(\frac{N}{a}\right)^2\tan\varphi^2\right)\right\}$$

Vernachlässigt man in den dritten Differentialquotienten die Glieder mit e^4, so ist

$$\frac{d^3\varphi}{dS^3} = \frac{\cos\alpha}{N^3}\Big\{(1 + 3\tan\varphi^2)\sin\alpha^2$$

$$+ e^2\big(2(1 - 4\sin\varphi^2)\sin\alpha^2 + 3\cos 2\varphi\cos\alpha^2\big)\Big\}$$

$$\frac{d^3 w}{dS^3} = \frac{2\sin\alpha}{N^3\cos\varphi}\{(1 + 3\tan\varphi^2)\cos\alpha^2 - \tan\varphi^2\sin\alpha^2$$

$$+ e^2\cos\varphi^2\cos\alpha^2\}$$

$$\frac{d^3\alpha}{dS^3} = -\frac{\sin\alpha\tan\varphi}{N^3}\{(5 + 6\tan\varphi^2)\cos\alpha^2$$

$$- (1 + 2\tan\varphi^2)\sin\alpha^2 + e^2\cos\varphi^2\cos 2\alpha\}.$$

Vernachlässigt man in den vierten und fünften Differentialquotienten auch noch die Glieder mit e^2, so ist

$$N^4 \cdot \frac{d^4\varphi}{dS^4} = \tan\varphi\sin\alpha^2\{1 + 3\tan\varphi^2 - 3(3 + 5\tan\varphi^2)\cos\alpha^2\}$$

$$N^5 \cdot \frac{d^5\varphi}{dS^5} = \sin\alpha^2\cos\alpha\{3(3 + 30\tan\varphi^2 + 35\tan\varphi^4)\cos\alpha^2$$

$$- (1 + 30\tan\varphi^2 + 45\tan\varphi^4)\}$$

$$= \sin\alpha^2\cos\alpha\{4(2 + 15\tan\varphi^2 + 15\tan\varphi^4)\cos\alpha^2$$

$$- (1 + 30\tan\varphi^2 + 45\tan\varphi^4)\sin\alpha^2\}$$

$$N^4 \cdot \frac{d^4 w}{dS^4} = -4\frac{\tan\varphi\sin 2\alpha}{\cos\varphi}\{(1 + 3\tan\varphi^2)\cos 2\alpha + \cos\alpha^2\}$$

$$N^5 \cdot \frac{d^5 w}{dS^5} = \frac{8\sin\alpha}{\cos\varphi}\{(2 + 15\tan\varphi^2 + 15\tan\varphi^4)\cos\alpha^4$$

$$- (1 + 20\tan\varphi^2 + 30\tan\varphi^4)\sin\alpha^2\cos\alpha^2$$

$$+ (1 + 3\tan\varphi^2)\tan\varphi^2\sin\alpha^4\} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\{3(1 + 8\tan\varphi^2$$

$$+ 8\tan\varphi^4)\sin 4\alpha + 2(1 + 2\tan\varphi^2)\sin 2\alpha\}$$

$$+ 4\frac{\sin\alpha\tan\varphi^2}{\cos\varphi}\{3(1 + 2\tan\varphi^2)\cos 4\alpha + \cos 2\alpha\}$$

$$N^4 \cdot \frac{d^4\alpha}{dS^4} = \sin\alpha\cos\alpha\{5 + 28\tan\varphi^2 + 24\tan\varphi^4$$

$$- 6(1 + 8\tan\varphi^2 + 8\tan\varphi^4)\sin\alpha^2\}.$$

In diesen Formeln sind für α und φ die Werte des gegebenen Punktes M zu setzen.

Diese Formeln reichen bei Dreiecken erster Ordnung bis zu Seitenlängen von 150 km aus. Bei den Dreiecken zweiter Ordnung können die Glieder mit S^4, bei denen dritter Ordnung meistens auch die Glieder mit S^3 vernachlässigt werden — bei einem Genauigkeitsansatze der preußischen Landesaufnahme. Mittels Tafeln für die Koeffizienten der Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ mit dem Argumente φ kann die Rechnung sehr gekürzt werden.

O. Schreiber liefert in den »Rechenvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme« eine Lösung dieser Aufgabe (bei Seitenlängen bis 120 km), welche der *Gauß*schen für die Kugel der »Vierten Methode« des Art. 16 den »Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie« (Ostwalds Klassiker Nr. 177) entspricht. In den Dreiecken erster Ordnung werden einige Glieder fünfter Ordnung für den Längenunterschied noch berücksichtigt*). Die für die logarithmische Berechnung überaus bequem (für die Dreiecke verschiedener Ordnung getrennt) angelegten Tafeln sind für die Breite von 47° bis 57° gegeben. In Dr. *Th. Albrecht*s »Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen« (Vierte Auflage, Leipzig 1908) sind diese Tafeln (S. 287—291) von der Breite 30° an bis zur Breite 64° — allerdings im Intervalle von 10 zu 10 Minuten (was vollkommen ausreicht) — erweitert**).

Bei *Schreiber*s (neuer) Zählung: Azimut T von Norden über Osten, Länge L nach Osten wachsend (S vom gegebenen Punkte 1 zum gesuchten Punkte 2 wachsend) ist in den vorigen Formeln

$$\alpha = T + 180^\circ, \ w = -L$$

zu setzen.

Bei der indirekten Lösung von *Gauß* der »Zweiten Abhandlung« fallen die geraden Potenzen von S weg, statt der ganzen Seite S kommt aber nur die halbe zum Einfluß. Diese Lösung

---

*) Den Beweis dieser Formeln hat *Schreiber* im § 10 des I. Bandes des Werkes: »Das deutsche Vermessungswesen« (Stuttgart, 1882) mitgeteilt.

**) Eine bedeutende Erleichterung der Rechnung dieser für jede Dreieckseite zu lösenden Aufgabe wurde gegenwärtig durch die neuen achtstelligen Logarithmentafeln von *Bauschinger* und *Peters*, siebenstelligen Tafeln von *Peters* (Leipzig, 1910 und 1911) ermöglicht.

bietet eine bequeme Kontrolle der Berechnung nach *Schreiber*, bei etwaigen Unterschieden in den letzten Stellen bei großer Seitenlänge (100 bis 150 km) sind die *Gauß*schen Zahlen beizubehalten.

Zu S. 41. $\varphi = \lambda + a(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cos \lambda^2) - \frac{1}{2} s^2 \tan \lambda'$

$$\tan \lambda' = \tan \lambda + \frac{a}{\cos \lambda^2},$$

woraus Gleichung (23) folgt.

Zu S. 41. Die Formel (21) wurde unter Voraussetzung der Vernachlässigung der Glieder mit ε^2 erhalten. Für den Fall $\alpha = 90$ und einer Breite φ, welche von λ' höchstens um eine Größe der Ordnung ε verschieden sein kann, folgt aus Gleichung (9), daß die Gleichung

$$\sin \varphi = \sin \lambda' \cos s\,(1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon \cos \lambda'^2)$$

einschließlich der Glieder mit ε^2 genau ist. Ausführlicher wird der Verlauf der geodätischen Linie von *C. A. H. Bachoven von Echt*: »Die Kürzeste auf dem Erdsphäroid nebst den Hauptaufgaben der Geodäsie, in neuer Darstellung« (Coesfeld, 1865) behandelt.

Zu S. 42. Über den Unterschied der Winkelmessung in der Vertikalebene und nach den Tangenten der geodätischen Linie siehe Ostwalds Klassiker, Nr. 177, S. 104.

Zu S. 50. Für die Sehnenrechnung *Delambre*s war es, wie *Soldner* selbst am Anfange seiner Abhandlung betont, nicht nötig, die Abplattung zu berücksichtigen.

Zu S. 54 u. 59. Tafel I und II sind gegenwärtig durch neue Tafeln (mit *Bessel*s Elementen gerechnet) überflüssig geworden.

---

1 Bayrische Rute = 10 Fuß. Nach Königlicher Verordnung vom 28. Eebruar 1809 ist

$$1 \text{ bayrischer Fuß} = 129{,}38 \text{ Pariser Linien},$$

auf den peruanischen Toise bei $+ 13^\circ$ R gemessen; daraus folgt

$$\log \frac{\text{Bayr. R.}}{\text{Meter}} = 0{,}4651733342.$$

Bezüglich der Ausgleichung der Beobachtungen gibt »Die Bayrische Landesvermessung« (S. 284): »nachstehende bei der ersten Berechnung des bayrischen Dreiecksnetzes befolgte

Vorschrift, welche von *Soldner* herrührt, der aber über dieselbe keinerlei schriftliche Erläuterung hinterlassen hat.«

»Die bei der Ausgleichung strenge zu erfüllenden Bedingungen sind die folgenden:

1. Die Summe der drei Winkel jedes Dreieckes muß genau zwei rechten Winkeln plus dem sphärischen Exzesse gleich werden.

2. Die aus verschiedenen Dreiecken sich ergebenden Resultate für die Orientierung einer und derselben Dreiecksseite, d. h. die auf verschiedenen Wegen gewonnenen Direktionswinkel dieser Seite müssen schließlich unter sich identisch ausfallen; endlich müssen

3. die beobachteten Winkel solche Korrektionen erhalten, daß eine und dieselbe Dreiecksseite, aus verschiedenen Dreiecken berechnet, stets gleich lang hervorgeht, daß also der betreffende Logarithmus in allen einschlägigen Dreiecken den gleichen Wert erhält.«

Anläßlich der Ausgabe des Werkes: »Die Bayrische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage,« beschloß die Königliche Steuerkatasterkommission, die ältere Berechnung zu wiederholen, und hierbei die Ausgleichung der Beobachtungen den Prinzipien der Methode der kleinsten Quadrate möglichst anzupassen.

Dieses Werk bringt auch einen Abdruck der von *Soldner* 1813 veröffentlichten Broschüre: »Bestimmung des Azimutes von Altomünster auf dem nördlichen Frauenturme zu München.« Dieses Azimut hatte 1802 der französische Ingenieur *Henry* bestimmt, infolge Störung der Pendeluhr durch das Läuten war es aber fehlerhaft. *Soldner* ermittelte die Ursache des Fehlers, bestimmte dieses Azimut aus Beobachtungen des Polarsternes derart genau, daß sein Resultat selbst durch Einführung einer verbesserten Position des Polarsternes nur um $+1{,}59''$ (und Berücksichtigung der vernachlässigten täglichen Aberration $-0{,}31''$) geändert wurde.

Aus dieser Abhandlung kann man ersehen, mit welcher Umsicht und mit welchem Scharfsinn *Soldner* seine Beobachtungen anstellte und berechnete.

Soldners Schema

zur Berechnung der Dreiecksseiten, Direktionswinkel und der Koordinaten.

Dreieck	Ausgeglichene Winkel	Berechnung von $\log r + \log \sin$ d. Seiten	$\triangle$
Nr.		$MP = 4{,}2848020$	56
W. Wendelstein Pyr.	47° 25′ 12,80″	$\log \sin W = 9{,}8670760$	
P. Peißenberg T.	49 57 57,56	$MW = 4{,}3017635$	61
M. München n. Frt.	82 36 57,88	$\log \operatorname{cosec} P = 0{,}1159625$	
	180 00 08,24	$\log \sin M = 9{,}9963835$	
Sph. Exc. = 8,24″		$PW = 4{,}4141095$	102

Berechnung der Direktionswinkel und der Koordinaten.

Für *Peissenberg Turm* aus Wendelstein Pyramide.

$$\begin{array}{lrrr}
w\,MW = & 235^\circ & 41' & 05{,}15'' \\
+M = & 82 & 36 & 57{,}88 \\
\hline
w\,MP = & 318^\circ & 18' & 03{,}03'' \\
 & +180 & 00 & 00{,}00
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrr}
w\,WM = & 55^\circ & 41' & 09{,}18'' \\
-\;W = & 47 & 25 & 12{,}80 \\
\hline
w\,WP = & 8^\circ & 15' & 56{,}38'' \\
 & +180 & 00 & 00{,}00
\end{array}$$

$$+\frac{(\text{Ord.}\quad)\,m}{r^2 \sin 1''} = \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \qquad\qquad +\frac{(\text{Ord. } W)\,m}{r^2 \sin 1''} = -\;\;.\;\;.\;\;.\;1{,}814$$

$$+\frac{mn}{2\,r^2 \sin 1''} = \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \qquad\qquad +\frac{mn}{2\,r^2 \sin 1''} = +\;.\;\;.\quad 2{,}062$$

$$w \quad = \overset{\circ\qquad\prime\qquad\prime\prime}{.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.} \qquad\qquad w\,PW \quad = 188^\circ\ 15'\ 56{,}63''$$

$$\begin{array}{lrl}
\log \sin w\,WP = & & 9.1576475 \\
\log \operatorname{arc}\ PW = & & 4.4141197 \\
\hline
\log m & = & 3.5717672 \\
m & = & +\,3730{,}501 \\
+\dfrac{(\text{Ord.}\,P)^2 m}{2\,r^2} & = & +\quad 0.081 \\
-\dfrac{n^2\,m}{6\,r^2} & = & -\quad 0.086 \\
+\ \text{Abszisse}\ W & = & -\,16547{,}27 \\
\hline
\text{Abszisse}\ P & = & -\,12816{,}77
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\log \cos w\,WP = & & 9{,}9954650 \\
\log \operatorname{arc}\ PW = & & 4{,}4141197 \\
\hline
\log n & = & 4{,}4095847 \\
n & = & +\,25679{,}390 \\
-\dfrac{(\text{Ord. } W)\,m^2}{2\,r^2} & = & +\quad 0{,}016 \\
-\dfrac{m^2\,n}{6\,r^2} & = & -\quad 0{,}012 \\
+\ \text{Ordinate}\ W & = & -\,11294{,}02 \\
\hline
\text{Ordinate}\ P & = & +\,14385{,}37
\end{array}$$

Nachwort.

Das Heft Nr. 184 von »Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften« enthält einen Abdruck der Abhandlung *Soldners* vom J. 1810, die erst im J. 1873 in dem Werke, »Die Bayrische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage«, veröffentlicht wurde, welches Werk aber nur geringe Verbreitung fand. Diese Abhandlung liefert eine kurzgefaßte, für die damalige Zeit ausreichende, höhere Geodäsie. Ihr erster Teil enthält die Lösung der wichtigsten Aufgaben mittels sphärischer Rechnung, wo aber der Einfluß der Abplattung untersucht wird, sowie die Dotierung der Meßtischblätter mit Fixpunkten*). Der zweite Teil gibt die Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie und deren Anwendung für die Lösung der Hauptaufgabe: Berechnung der geographischen Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten.

Die Anmerkungen des Herausgebers enthalten eine biographisch literarische Notiz über *Soldner*, Ergänzung der weggelassenen Entwicklungen, sowie Noten zur Erläuterung und Vereinfachung des Textes.

Dieses Heft kann beim ersten Unterrichte in höherer Geodäsie trefflich verwendet werden. Wird dieser Zweck allein beabsichtigt, so kann für das Studium des zweiten Teiles nachstehender Vorgang empfohlen werden: Durch die Note S. 66 wird die umständliche Entwicklung *Soldners* S. 30 u. 31 sehr vereinfacht. Gleiches gilt von der Note S. 69—71 als Ersatz der Entwicklungen S. 32 bis 40, die zugleich eine Ausgestaltung der *Soldner*schen Lösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie liefert.

Einen ergänzenden Abschluß zu *Soldners* Abhandlung gibt der Anhang (S. 102—111) des Heftes Nr. 177 von »Ostwalds Klassikern«, der auch die Reduktionen gemessener Linien und beobachteter Winkel enthält, so daß sie als Seiten und Winkel eines sphäroidischen Dreieckes gelten können.

---

*) Zur Zeit *Soldners* konnte es einen Streit: ob Meßtisch oder Theodolit?, nicht geben. Wenn gegenwärtig für die Katasteraufnahme der Streit zugunsten des Theodoliten (d. h. des Winkelmessens und Rechnens mit sin und cos) entschieden ist, so wird bei der kartographischen Aufnahme, selbst für den Maßstab 1 : 10000, der Meßtisch noch immer eine ausgiebige Verwendung finden können.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.